МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНИКА»

П.М. Щербаков, С.Є. Тимченко і др.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Навчальний посібник

Дніпро
НТУ «ДП»
2023

УДК 512.644 (075.8)
Е50

Рекомендовано вченою радою університету як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 «Прикладна математика» (протокол № 9 від 21.09.2023).

Рецензенти:

А.Є. Шевельова – д-р фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;

В.Б. Говоруха – д-р фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, фізики та загально інженерних дисциплін Дніпровськогго державного аграрно-економічного університету.

Е50 **Елементи лінійної алгебри**: навчальний посібник / П.М. Щербаков, С.Є. Тимченко, А.Г. Шпорта, Д.В. Бабець, Ю.М. Головко; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро: НТУ «ДП», 2023. – 166 с.

Викладено теоретичні основи розділу «Лінійна алгебра» з дисципліни «Алгебра та геометрія». Розглянуто методи розв’язування задач з цього розділу та наведено значну кількість розібраних прикладів.

Містить завдання для самоконтролю із відповідями та індивідуальні завдання для перевірки знань під час дистанційної роботи. Також наведено приклад повного розв’язку типового індивідуального завдання.

Призначено для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 Прикладна математика.

УДК 512.644 (075.8)

Зміст

ВСТУП

Застосування дистанційної форми навчання супроводжується певними складнощами, обумовленими як технічними, так і психологічними факторами. Тому студенти не завжди мають повне розуміння тих положень, які вони інформативно отримують з екрану комп'ютера.

Мета даної методичної розробки - надати студентам істотну допомогу при вивченні розділу «Лінійна алгебра». Структура цієї роботи складається з теоретичного і практичного розділів окремо для кожної темі, що дає змогу кожному студенту конкретно визначитись, куди йому необхідно звернутися за консультаційною допомогою.

Всі теоретичні викладки містять додаткові пояснення тих положень, що зустрічалися раніше, наприклад у школі, та супроводжуються характерними прикладами.

Практична частина орієнтована на розгляд тих випадків, включаючи частини, що складають основу для розуміння відповідного алгоритму розв'язку. Застосування методу стислого повторення деяких означень чи математичних перетворень сприяє кращому засвоюванню важливих понять.

Посібник містить завдання для самоконтролю з відповідями та індивідуальні завдання для перевірки знань у разі дистанційної роботи. Також наведений приклад повного розв'язку типового індивідуального завдання.

Навчальний посібник призначено для здобувачів ступеня бакалавра спеціальності 113 – «Прикладна математика», які опанують розділ «Лінійна алгебра» з дисципліни «Алгебра і геометрія». Також може бути рекомендований для студентів перших курсів технічних закладів вищої освіти всіх форм навчання та науково-педагогічних працівників, які викладають курс вищої математики, зокрема, у дистанційному форматі.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 1. Визначники

1.1. Поняття матриці

Матрицею розміру $m \times n$ назівається множина чисел, які розташовані у вигляді прямокутної таблиці з m рядками та n стовпцями. Числа, що складають матрицю, називаються її елементами і позначаються буквами з двома індексами. Перший індекс i елемента a_{ij} означає номер рядка, в якому елемент знаходиться, а другий j - номер стовпця.

Представимо матрицю А$[m \times n]$ (або просто А) у загальному вигляді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

У прийнятому позначенні елемент a_{21} знаходиться в другому рядку і першому стовпцю.

Матриця, в якій число рядків дорівнює числу стовпців $(m = n)$, називається <u>квадратною матрицею порядку n.</u>

<u>Зауваження 1</u>. Тільки для квадратних матриць існують визначники

<u>Зауваження 2</u>. Основні положення теорії матриць розглянемо в темі 2.

1.2. Визначники другого порядку

Нехай задана така квадратна матриця: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Визначником (або детермінантом) другого порядку цієї матриці називається число Δ, яке одержують із її елементів за правилом $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Визначник позначають символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ або $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Таким чином, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Елементи a_{11}, a_{22} утворюють головну діагональ цього визначника, а елементи a_{12}, a_{21} – сторонню.

Отже, визначник другого порядку дорівнює різниці між добутками елементів, які лежать на головній і сторонній діагоналях.

Приклад 1.1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$.

Розв'язок. $\Delta = (-2)\cdot(-4) - 5\cdot 3 = 8 - 15 = -7$.

Зауваження. Для скорочення запису позначення Δ (або $\det$) не вказують.

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}$.

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x.$$

1.3. Визначники третього порядку

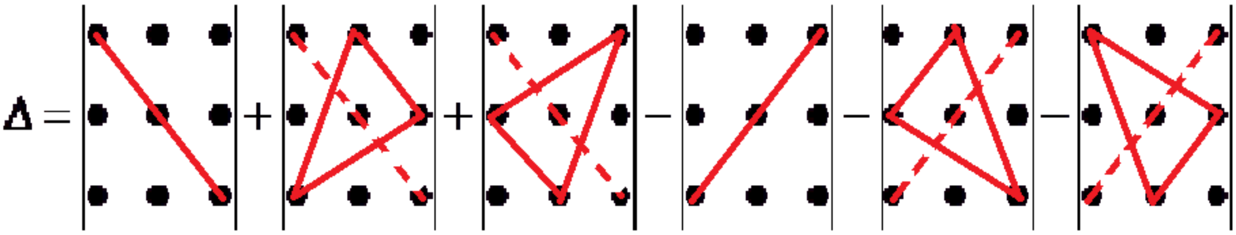
Розглянемо таку квадратну матрицю: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Визначником (або детермінантом) третього порядку цієї матриці називається число Δ, яке одержують за таким правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

У цьому визначнику елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ, а елементи $a_{13}, a_{22,} a_{31}$ – сторонню.

Обчислення визначника за правилом трикутників виконується згідно з такою схемою:



Згідно з цією схемою перші три доданки є добутками елементів, які розташовані на головній діагоналі та у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі; аналогічно утворюються від'ємні доданки, тільки за основу необхідно брати сторонню діагональ.

<u>Приклад 1.3.</u> Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u>

$$\Delta = 5\cdot 2\cdot 6 + 3\cdot 4\cdot 7 + (-1)\cdot 3\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 7 - 4\cdot 3\cdot 5 - 3\cdot(-1)\cdot 6 =$$

$$= 60 + 84 - 6 - 28 - 60 + 18 = 68.$$

<u>Обчислення визначника за правилом Саррюса</u> виконується за основою такого запису:

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} - \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Спочатку до визначника необхідно дописати два перші стовпці. Тоді перші три доданки є добутками елементів, які розташовані на головній діагоналі і на прямих, їй паралельних. Від'ємні три доданки – це добуток елементів, які розташовані на сторонній діагоналі і на прямих, їй паралельних.

<u>Приклад 1.4.</u> Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u>

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} - \left|\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} =$$

$$=2\cdot2\cdot5+4\cdot1\cdot3+(-1)\cdot(-4)\cdot1-(-1)\cdot2\cdot3-2\cdot1\cdot1-4\cdot(-4)\cdot5=$$

$$=20+12+4+6-2+80=120.$$

1.4. Основні властивості визначників

Для визначників другого порядку властивості наведені нижче, вони випливають із формули їх обчислення: $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

1. Величина визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовпцями і навпаки $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}$.
2. Визначник змінить свій знак на протилежний, якщо поміняти місцями два його рядки або два стовпці: $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}$.
3. Спільний множник всіх елементів будь-якого рядка (або стовпця) можна винести за знак визначника $\Delta=\begin{vmatrix}ka_{11} & a_{12}\\ ka_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=k(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$.
4. Визначник не зміниться, якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число: $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ $=\begin{vmatrix}a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$.
5. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) дорівнює нулю.
6. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник також дорівнює нулю.
7. Якщо кожен елемент будь-якого рядка (стовпця) визначника подати у вигляді суми двох доданків, то його можна розкласти на суму двох визначників: $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$.

Зауваження. Розглянуті властивості справедливі також для визначників будь-якого порядку.

Приклад 1.5. Використовуючи основні властивості, спростити і обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix}$.

Розв'язок. Із другого стовпця винесемо множник 2 і запишемо:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$. Тепер із елементів другого рядка віднімемо відповідні елементи першого рядка, помножені на 2, а до елементів третього рядка додамо елементи першого рядка, помножені на 3.

$\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. Далі елементи другого рядка помножимо на 2 і додамо до першого, потім елементи другого рядка помножимо на 5 і додамо до третього рядка: $\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 36 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-36) = -72.$

1.5. Визначники *n* -го порядку

Визначник $n-$го порядку квадратної матриці має такий вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається новий визначник, утворений із даного шляхом викреслювання i – го рядка та j – го стовпця, на пересіченні яких знаходиться цей елемент.

Приклад 1.6. Для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 \\ -2 & 5 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ знайти мінор елемента a_{23}.

Розв’язок. Мінор M_{23} елемента a_{23} знаходимо шляхом викреслювання другого рядка і третього стовпця у визначнику Δ. $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

Зауваження. Мінор – це визначник, порядок якого на одиницю менше порядку визначника, з якого він утворений, тобто мінор $(n - 1)$ – го порядку для визначника n – го порядку.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається його мінор, який береться зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1)$$

Приклад 1.7. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{41} для визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & -2 \\ 6 & -2 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

Розв’язок. Для знаходження мінора M_{41} викреслимо в цьому визначнику четвертий рядок і перший стовпець, тобто $M_{41} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Алгебраїчне доповнення A_{41} знайдемо за формулою (1):

$$A_{41} = (-1)^{4+1} M_{41} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Теорема (про розкладання визначника). Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) – розкладання визначника за елементами i – го рядка.

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) – розкладання визначника за елементами j – го стовпця.

Приклад 1.8. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$,

а) розклавши його за елементами першого стовпця;

б) спочатку спростити його на основі властивостей, які розглянуті в п. 1.4.

Розв’язок.

а) у формулу $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ підставимо $j = 1$, $n = 4$. Одержимо:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{4} a_{i1} A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} == 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -4 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (60 + 30 - 8 - 40 + 40 - 9) + 1 \cdot (40 - 4 - 15 - 20 - 6 - 20) +$$

$$+2 \cdot (20 + 3 - 10 - 10 - 4 + 15) - 3 \cdot (12 + 12 + 8 + 8 - 16 + 9) = 73 - 25 + 28 - 99 = -23.$$

б) Всі елементи першого стовпця визначника помножимо на 3 і додамо до відповідних елементів другого стовпця, потім елементи першого стовпця помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів третього і четвертого стовпців:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 7 \\ 3 & 14 & 7 & 11 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник по елементах другого рядка ($i = 2$, $n = 4$).

$$\Delta = \sum_{j=1}^{4} a_{2j} A_{2j} = (-1) \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \\ 14 & 7 & 11 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= 1 \cdot (440 + 98 + 42 - 336 - 245 - 22) = -23.$$

Практика 1. Обчислення визначників

1.1. Визначники другого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Обчислити визначники

Задача 1.1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}.$

Розв'язок. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-7) \cdot (-3) = 10 - 21 = -11.$

Задача 1.2. $\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}.$

Розв'язок.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab.$$

Задача 1.3. $\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix}.$

Розв'язок. $\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - (-\cos^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$

Задача 1.4. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

Розв'язок.

$$\begin{vmatrix} x & x+2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 5(x+2) = 0 \Rightarrow 3x - 5x - 10 = 0 \Rightarrow -2x = 10 \Rightarrow x = -5.$$

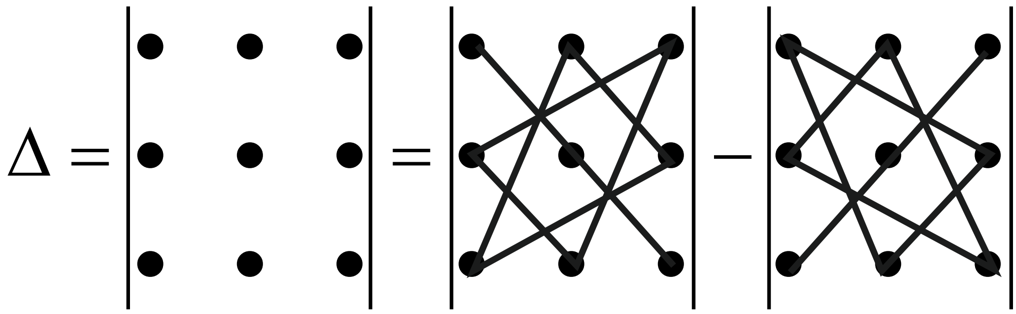
Перевірка. $\begin{vmatrix} -5 & -5+2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 15 = 0.$

Відповідь: $x = -5.$

1.2. Визначники третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

<u>Правило трикутників</u>



<u>Обчислити визначники:</u>

<u>Задача 1.5.</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

<u>Розв'язок.</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3 + 3\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot 4 - 4\cdot(-2)\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 - 5\cdot 3\cdot 3 =$$

$$= -12 + 3 + 40 + 8 - 4 - 45 = -10.$$

<u>Задача 1.6.</u> $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}.$

<u>Розв'язок.</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = a\cdot a\cdot a + 1\cdot 1\cdot a + (-1)\cdot(-1)\cdot a - a\cdot a\cdot a - (-1)\cdot 1\cdot a - (-1)\cdot 1\cdot a =$$

$$= a^3 + a + a - a^3 + a + a = 4a.$$

Задача 1.7. Розв’язати рівняння $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Розв’язок.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 12 + 9x - 18 - 3x^2 - 4x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2,\ x_2 = 3.$$

Перевірка. $x_1 = 2.$ $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ $x_2 = 3.$ $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Відповідь: $x_1 = 2,\ x_2 = 3.$

Спростити і обчислити визначники:

Задача 1.8. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

Розв’язок.

Скористаємося властивостями визначників, які розглянуті в п. 1.4 теоретичного курсу. Всі елементи першого рядка помножимо на (–2) і додамо до відповідних елементів другого рядка, потім перший рядок додамо до третього. Отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \cdot(-2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -6+1 & -2+2 & 4-3 \\ 3+2 & 1-1 & -2+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Далі другий рядок додамо до третього:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1&-2\\-5&0&1\\5&0&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-2\\-5&0&1\\0&0&3\end{vmatrix}=-(1\cdot(-5)\cdot 3)=-(-15)=15.$$

<u>Пояснення.</u> Записи дій щодо перетворення визначника, щоб одержати нулі в його рядку (стовпці), додатково пояснені схематично з відображенням напрямку додавання рядка (стовпця) і числа, на яке помножають всі його елементи.

<u>Задача 1.9.</u> $\Delta=\begin{vmatrix}2&4&125\\-1&3&50\\1&2&75\end{vmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u> Спільний множник елементів третього стовпця винесемо за знак визначника:

$$\Delta=25\begin{vmatrix}2&4&5\\-1&3&2\\1&2&3\end{vmatrix}.$$

Елементи другого рядка помножимо на 2 і додамо до відповідних елементів першого рядка, потім додамо до третього.

$$\Delta=25\begin{vmatrix}2&4&5\\-1&3&2\\1&2&3\end{vmatrix}\ 2\ =25\begin{vmatrix}2-2&4+6&5+4\\-1&3&2\\1-1&3+2&2+3\end{vmatrix}=25\begin{vmatrix}0&10&9\\-1&3&-1\\0&5&0\end{vmatrix}.$$

Далі другий стовпець помножимо на (–1) і додамо до 3-го стовпця:

$$\Delta = 25\begin{vmatrix} 0 & 10 & 9 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 0 & 10 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\cdot(-1)$$

Останнє. Перший стовпець помножимо на (–1) і додамо до третього стовпця:

$$\Delta = 25\begin{vmatrix} 0 & 10 & 9 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 25\begin{vmatrix} 0 & 10 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 25\cdot((-1)\cdot 5\cdot(-1)) = 125.$$

$$\cdot(-1)$$

<u>Зауваження</u>. Далі будуть розглянуті завдання на обчислення визначників будь-якого порядку розкладанням його за елементами рядка (стовпця).

1.3. Визначники *n* - го порядку

Визначник *n* - го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

обчислюється за такими формулами:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i = 1, 2, \ldots n); \tag{1.1}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots n). \tag{1.2}$$

Формула (1.1) – розкладання визначника за елементами i - го рядка; формула (1.2) - за елементам j - го стовпця. A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} - мінор елемента a_{ij}, тобто визначник $(n-1)$ - го порядку, утворений з визначника n - го порядку шляхом викреслювання i - го рядка і j - го стовпця на перетину яких знаходиться елемент.

Зауваження. Спочатку цей метод застосуємо для обчислення визначника 3-го порядку.

Задача 1.10. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$

Розв'язок 1. Розкладемо визначник за елементами першого рядка. Для цього у формулу (1.1) підставимо значення $i = 1$, $n = 3$ і отримаємо $\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} A_{1j}$, тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-6-10) - 3(9-5) + 4(6+2) = -12.$$

Розв'язок 2. Спочатку спростимо визначник так, щоб у першому стовпці було два нулі. Для цього третій рядок помножимо на (–3) і додамо до другого рядка, потім помножимо його на (–2) і додамо до першого рядка.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-3) \ \cdot(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2-2 & 3-4 & 4-6 \\ 3-3 & -2-6 & 5-9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо одержаний визначник за елементами першого стовпця. Для цього у формулу (1.2) підставимо j =1, n = 3. Маємо:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}. \text{ Отже, } \Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4) - (-2) \cdot (-8) = 4 - 16 = -12.$$

Зауваження. При обчисленні визначників n-го порядку спочатку їх спрощуємо так, щоб у будь-якому рядку (стовпці) було як найбільше нулів. Необхідні для цього перетворення будемо пояснювати схематично.

Обчислити визначники

Задача 1.11. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$

Розв'язок.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \\ \cdot(-3) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3-3 & -4-3 & 7-9 & 5-6 \\ 4-4 & -9-4 & 8-12 & 5-8 \\ -3+3 & 2+3 & -5+9 & 3+6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкладемо визначник за елементами першого стовпця. Для цього у формулу (1.2) підставимо j = 1, n = 4 і маємо:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{4} a_{i1}A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}.$$

Отже, $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & -13 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -7 & -2 & -1 \\ -13 & -4 & -3 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$

$= -(252 + 30 + 52 - 20 - 84 - 234) = -(-4) = 4.$

<u>Задача 1.12.</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

<u>Розв'язок.</u> Зробимо перетворення так, щоб, наприклад, у першому стовпцю три елементи дорівнювали нулю. Для цього помножимо на (–3) другий рядок і додамо його до першого рядка, потім помножимо на 2 і додамо до третього рядка, далі помножимо на (–1) і додамо до четвертого рядка, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \cdot 2 \\ \cdot(-1) \\ \end{array} = \begin{vmatrix} 3-3 & 5-6 & 7-9 & 2-12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2+2 & -3+4 & 3+6 & 2+8 \\ 1-1 & 3-2 & 5-3 & 4-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник по елементам першого стовпця, застосовуючи формулу (1.2) при $j = 1$, $n = 4$:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{4} a_{i1}A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}.$$

Оскільки $a_{11} = a_{31} = a_{41} = 0, \quad a_{21} = 1,$ то:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Цей визначник можна обчислити методом трикутників, але ми його розкладемо за елементами першого стовпця:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} (-1) = -\begin{vmatrix} -1+1 & -2+2 & -10 \\ 1-1 & 9-2 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -(0 - (-10) \cdot 7) = -70.$$

Завдання для самоконтролю

1. Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} log_a b & log_{a^2} b \\ log_{b^2} a & log_b a \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & a & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}$.

2. Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} cos\,x & sin\,x \\ sin\,x & cos\,x \end{vmatrix} = 1$; в) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

3. Розв'язати нерівність:

а) $\begin{vmatrix} 3 & x+4 \\ 2x & x+1 \end{vmatrix} \ge 0$;   б) $\begin{vmatrix} 7x+1 & x+3 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} \le 0$.

4. Спростити і обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$;   б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$;   в) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & -4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$;   д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Відповіді

1. а) 2;   б) 1;   в) $\frac{3}{4}$;   г) 35;   д) -108;   е) $-2a^2$.

2. а) $x_1 = 2,\ x_2 = -5$;   б) $x = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;   в) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

3. а) $x \in \left[-3; \frac{1}{2}\right]$;   б) $x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$.

4. а) 54; б) 20; в) 48; г) 5085; д) 120.

Тема 2. Матриці

2.1. Основні означення

Прямокутна таблиця $m \times n$ чисел називається матрицею розміром $m \times n$ (див.1.1). Часто матрицю позначають однією буквою, наприклад, А, або $A_{m\times n}$, якщо мають намір вказати її розмір. Розглянемо таку матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{in}$ складають i - й рядок ($i = 1, 2, \ldots, m$);

Елементи $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, ..., a_{mj}$ складають j - й стовпець ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Зауваження.

Крім круглих дужок матрицю ще позначають квадратними дужками

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$ або подвійними прямими $$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Якщо матриця складається з одного рядка або стовпця, то вона відповідно називається матрицею – рядком $A = \left(a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n}\right)$, або матрицею – стовпцем

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ ... \\ b_{m1} \end{pmatrix}.$$

Якщо $m = n$, матриця називається квадратною порядку n.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

У квадратній матриці n - го порядку елементи $a_{11}\ a_{22} \dots a_{nn}$ утворюють головну діагональ, а елементи $a_{1n}\ a_{2(n-1)} \dots a_{n1}$ – сторонню.

Квадратна матриця, всі елементи якої поза головною діагоналлю дорівнюють нулю, а саме: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, називається діагональною.

Одинична матриця – це діагональна матриця, в якій кожний елемент головної діагоналі дорівнює одиниці. Часто її позначають буквою E, тобто $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Квадратна матриця називається верхньою (нижньою) трикутною, якщо всі елементи, які розташовані під (над) головною діагоналлю дорівнюють нулю.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо довільну матрицю A розміром $m \times n$ (або $A_{m\times n}$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, яка одержана із матриці A заміною в ній рядків відповідними стовпцями, називається транспонованою для матриці A.

Приклад 2.1. Знайти транспоновану матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Зауваження. Якщо A – матриця розміром $m \times n$, то A^T має розмір $n \times m$.

2.2. Лінійні операції над матрицями

Лінійними операціями називають додавання (віднімання) матриць і множення матриці на число, тобто такі операції, які не змінюють розмірність результату (1 метр + 1 метр = 2 метри; 5· 2 метра = 10 метрів).

Додавання (віднімання) матриць можна виконувати тільки для матриць однакового розміру.

Сумою (різницею) матриць A і B, яка позначається $A + B$ ($A - B$), називається матриця C такого ж розміру, кожний елемент якої $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$), де a_{ij}, b_{ij} – елементи матриць A, B відповідно.

Приклад 2.2. Задані матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти їх суму і різницю.

Розв’язок. $A+B=\begin{pmatrix} 2+3 & -1+4 & 4-2 \\ -3+2 & 5+0 & -7+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$,

$$A-B=\begin{pmatrix} 2-3 & -1-4 & 4+2 \\ -3-2 & 5-0 & -7-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ -5 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Добутком матриці A на число λ називається матриця $C=\lambda A$, елементи якої одержують шляхом множення усіх елементів матриці A на число λ .

Приклад 2.3. Матрицю $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ помножити на 4.

Розв’язок. $4A=\begin{pmatrix} 4\cdot 2 & 4\cdot 3 & 4\cdot(-2) \\ 4\cdot 1 & 4\cdot(-4) & 4\cdot 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 12 & -8 \\ 4 & -16 & 20 \end{pmatrix}$.

Зауваження. За знак матриці можна виносити загальний множник тільки всіх її елементів.

Властивості лінійних операцій над матрицями

1. $A+B=B+A$;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$;
5. $(\alpha\cdot\beta)A=\alpha(\beta\cdot A)$,

де $\alpha,\ \beta$ – числа.

2.3. Множення матриць

Матрицю A називають узгодженою з матрицею B, якщо число стовпців матриці A (її ширина) дорівнює числу рядків матриці B (її висоті).

Зауваження 1. Із узгодженості матриці A з матрицею B не випливає узгодженість матриці B з матрицею A.

Зауваження 2. Якщо A і B – квадратні матриці однакового розміру, то матриця A узгоджена з матрицею B, а матриця B узгоджена з матрицею A.

Множення матриці A на матрицю B визначено тільки в тому випадку, коли перший множник узгоджений з другим, тобто, коли $A = A_{m\times k}$, а $B = B_{k\times n}$.

Добутком матриці $A_{m\times k}$ на матрицю $B_{k\times n}$ називають матрицю $C_{m\times n}$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj}.$$

<u>Приклад 2.4.</u> Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u>

$$AB = C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot1 + 3\cdot2 + (-2)\cdot4 & 5\cdot2 + 3\cdot1 + (-2)\cdot2 \\ 1\cdot1 + (-1)\cdot2 + 0\cdot4 & 1\cdot2 + (-1)\cdot1 + 0\cdot2 \\ 2\cdot1 + 1\cdot2 + 3\cdot4 & 2\cdot2 + 1\cdot1 + 3\cdot2 \\ 4\cdot1 + (-2)\cdot2 + 2\cdot4 & 4\cdot2 + (-2)\cdot1 + 2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & 1 \\ 16 & 11 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Пояснення. Ми помножили матрицю A розміром 4×3 на матрицю B розміром 3×2 і одержали матрицю C розміром 4×2, тобто $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$.

<u>Зауваження 1.</u> Якщо матрицю A можна помножити на матрицю B, то звідси не випливає що матрицю B можна помножити на матрицю A, оскільки із узгодженості A і B не випливає узгодженість B з A.

<u>Зауваження 2.</u> Якщо матрицю A можна помножити на матрицю B, а матрицю B можна помножити на матрицю A (наприклад A і B квадратні матриці), то AB не обов'язково дорівнює BA.

<u>Зауваження 3.</u> Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називають переставними (або комутативними).

<u>Приклад 2.5.</u> Помножити матрицю A на матрицю B (AB), а потім матрицю B на матрицю A (BA) і порівняти результати, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u>

а)

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot(-4) & 1\cdot(-3)+2\cdot 1\\ 4\cdot 2+(-1)\cdot(-4) & 4\cdot(-3)+(-1)\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -1\\ 12 & -13\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+(-3)\cdot 4 & 2\cdot 2+(-3)\cdot(-1)\\ (-4)\cdot 1+1\cdot 4 & (-4)\cdot 2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 7\\ 0 & -9\end{pmatrix}.$$

$AB\neq BA$.

б) $AB=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+5\cdot(-1) & 3\cdot(-5)+5\cdot 2\\ 1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot(-5)+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix};$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+(-5)\cdot 1 & 1\cdot 5+(-5)\cdot 2\\ (-1)\cdot 3+2\cdot 1 & (-1)\cdot 5+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

$BA=AB$. Отже, в цьому випадку матриці A і B переставні (або комутативні).

Множення одиничної матриці m-го порядку (E_m) на матрицю $A_{m\times n}$, або множення матриці $A_{m\times n}$ на одиничну матрицю n-го порядку (E_n) не змінює матрицю A, тобто $E_mA=AE_n$.

Приклад 2.6. Задана матриця $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$. Виконати такі дії:

а) помножити одиничну матрицю другого порядку (E_2) на матрицю A;

б) помножити матрицю A на одиничну матрицю третього порядку (E_3).

Розв’язок.

а) $E_2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 5 & 1\cdot 4+0\cdot(-2)\\ 0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 3+1\cdot 5 & 0\cdot 4+1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$

б) $AE_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 0+4\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 1 \\ 1\cdot 1+5\cdot 0+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 0+5\cdot 1+(-2)\cdot 0 & 1\cdot 0+5\cdot 0+(-2)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отже, $E_2A = AE_3$.

Цілий додатний степінь квадратної матриці А – це матриця A^n, яка дорівнює добутку n матриць А, тобто $A^n = \underbrace{A\cdot A\cdot A ... \cdot A}_{n}$.

<u>Приклад 2.7.</u> Знайти матрицю A^3, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u> $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 3 \\ 1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 1+3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$;

$$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2+5\cdot 1 & 5\cdot 1+5\cdot 3 \\ 5\cdot 2+10\cdot 1 & 5\cdot 1+10\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Якщо розміри матриць дозволяють здійснювати відповідні операції, то мають місце такі <u>властивості множення матриць</u>:

1. $(AB)C = A(BC) = ABC$;
2. Два дистрибутивні закони: $A(B+C) = AB + AC$ і $(A+B)C) = AC + BC$;
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, де λ – число (сполучений закон відносно скалярного множника λ);
4. $(AB)^T = B^T A^T$, де $(AB)^T$ – транспонована матриця для матриці (AB), $B^T; A^T$ - транспоновані матриці відповідно для матриць $B; A$.

<u>Приклад 2.8</u>. Знайти матрицю $(AB)^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u>

Перший спосіб.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку $(AB)^T = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -10 & 8 \end{pmatrix}$.

Другий спосіб.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \; B^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Отже, $(AB)^T = B^T A^T$.

2.4. Обернені матриці

Розглянемо квадратну матрицю n - го порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Цій матриці відповідає число, яке називають визначником, або детермінантом (див. 1.3):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратна матриця називається невиродженою (неособливою), якщо її визначник не дорівнює нулю, тобто $\det A \neq 0$. Якщо $\det A = 0$, матриця називається виродженою (особливою).

<u>Зауваження.</u> Тільки для квадратних невироджених матриць уводиться поняття оберненої матриці.

Матриця A^{-1} буде оберненою до матриці A, якщо виконується умова: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця порядку n.

Для матриці A існує єдина обернена матриця A^{-1}, яка визначається за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Щоб знайти обернену матрицю треба скласти матрицю з алгебраїчних доповнень до елементів заданої матриці, далі транспонувати її, а потім поділити на визначник $\det A$.

<u>Приклад 2.9.</u> Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Зробити перевірку за умовою $A \cdot A^{-1} = E$.

<u>Розв'язок.</u> Обчислимо визначник цієї матриці:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-1 \cdot (-1) \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0 - 8 - 6 + 6 - 2 - 0 = 2.$$

$\det A \neq 0$, тобто матриця А невироджена, і обернена до неї матриця існує. Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці А.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-2;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-4;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-4;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3.$$

Матрицю, складену із одержаних алгебраїчних доповнень необхідно транспонувати, тобто елементи A_{11}, A_{12}, A_{13} поставити в перший стовпець, A_{21}, A_{22}, A_{23} – в другий і A_{31}, A_{32}, A_{33} – в третій і поділити на $\det A = 2$. У результаті маємо:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ -4 & 6 & -4\\ -4 & 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & 3 & -2\\ -2 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Перевірку виконаємо за правилом множення матриць.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ -4 & 6 & -4\\ -4 & 5 & -3\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot(-4)+(-3)\cdot(-4) & 1\cdot 3+2\cdot 6+(-3)\cdot 5 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-4)+(-3)\cdot(-3)\\ 2\cdot(-2)+1\cdot(-4)+(-2)\cdot(-4) & 2\cdot 3+1\cdot 6+(-2)\cdot 5 & 2\cdot(-1)+1\cdot(-4)+(-2)\cdot(-3)\\ 2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+0\cdot(-4) & 2\cdot 3+(-1)\cdot 6+0\cdot 5 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-4)+0\cdot(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Тобто умова $A \cdot A^{-1} = E$ виконується.

2.5. Ранг матриці

Розглянемо матрицю А розміром $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виділімо в ній *k* рядків і *k* стовпців, при цьому *k* менше , або дорівнює меншому числу із m, n (позначають $k \le \min(m,n)$).

Визначник порядку *k*, який створений із тих елементів матриці *A*, які знаходяться на перетині виділених *k* рядків і *k* стовпців, називається мінором *k* - го порядку M_k, породженим матрицею А.

<u>Приклад 2.10.</u> Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ виділити будь-які мінори можливих порядків *k*.

<u>Розв'язок.</u> У заданій матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ кожний елемент є її мінором 1-го порядку.

Якщо виділити деякі два рядки і два стовпці матриці, то можна скласти мінори 2-го порядку. Так, із елементів, що стоять на перетині перших двох рядків і перших двох стовпців, складемо мінор другого порядку $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

, а із елементів, що стоять на перетині 2-го і 3-го рядків з 1-м і 3-м стовпцями, складемо такий мінор другого порядку: $M_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, і так далі.

Вибрав елементи, які стоять на перетині трьох рядків і трьох стовпців, наприклад, 2-го, 3-го і 4-го, складемо мінор 3-го порядку $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Мінору 4-го порядку для цієї матриці не існує, бо для 4-го стовпця немає 4-го рядка, тобто $M_k \leq M_3$.

Рангом матриці А називається число *r*, яке дорівнює найвищому порядку, відмінного від нуля її мінору (позначають $r(A)$ або RgA.

Із цього означення випливає, що:

1) будь-яка матриця $A_{m\times n}$ має ранг, тобто $0 \leq r(A) \leq \min(m,n)$;

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли матриця A нульова (всі її елементи дорівнюють нулю);

3) для квадратної матриці *n*-го порядку $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця *A* невироджена ($\det A \neq 0$).

Базисним мінором матриці зветься всякий відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці.

Для ненульової матриці завжди існує базисний мінор (взагалі кажучи, не єдиний). Рядки і стовпці, на перетині яких стоять елементи базисного мінора, називають базисними.

Рядок (стовпець) матриці, який не належить до базисного мінору, є лінійною комбінацією її базисних рядків (стовпців).

Щоб знайти ранг матриці, використовують метод обвідних мінорів, або метод елементарних перетворень.

Метод обвідних мінорів полягає в тому, що спочатку обчислюють мінори в напрямку від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо при цьому знайдено відмінний від нуля мінор порядку *k* (M_k), то далі обчислюють мінори порядку (*k* + 1), що містять цей мінор M_k.

Означення. Мінори порядку (k + 1), що містять мінор порядку k, називають обвідними мінорами. Коли всі обвідні мінори порядку (k + 1) дорівнюють нулю, або таких мінорів не існує, ранг матриці дорівнює k.

Приклад 2.11. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 11 \\ 7 & -15 & -7 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Серед мінорів 1-го порядку (тобто серед елементів матриці) є відмінні від нуля, наприклад елемент $a_{11}=1$. Тому $r(A)\geq 1$.
Серед мінорів 2-го порядку, які є обвідними для цього елемента, також є відмінні від нуля, наприклад, $M_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$.

Другі обвідні мінори 2-го порядку тепер обчислювати не потрібно, $r(A)\geq 2$. Отже, обчислимо всі обвідні мінори 3-го порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 11 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & -15 & -7 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 7 & -15 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

Всі мінори 3-го порядку, які є обвідними до M_2, дорівнюють нулю, тому $r(A)=2$.

Метод елементарних перетворень

Розглянутий метод обвідних мінорів не завжди зручно застосовувати бо необхідно обчислювати значну кількість визначників. Існують перетворення, яки не змінюють ранг матриці, а полегшують процедуру його обчислення. Такі перетворення називаються елементарними. До них належать:

1) перестановка двох довільних рядків (стовпців);

2) множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;

3) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і теж саме число;

4) викреслювання рядка (стовпця), усі елементи якого дорівнюють нулю;

5) транспонування матриці.

Дві матриці називають еквівалентними, якщо одна з них одержана з другої за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень. Якщо матриці A та B еквівалентні, то це записується так: $A \sim B$.

Ранги еквівалентних матриць однакові.

Використовуючи елементарні перетворення, матрицю можна довести до вигляду, коли всі елементи, крім $a_{11}, a_{22}, ..., a_{kk}$, де $k = \min\{m, n\}$, дорівнюють нулю. Ранг такої матриці дорівнює k. Варто згадати, що вказані елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{kk}$, де $k = \min\{m, n\}$ утворюють головну діагональ матриці.

Зауваження. На практиці для знаходження рангу матриці поєднують два розглянутих методи. Спочатку в результаті елементарних перетворень матрицю зводять до ступінчастого вигляду, коли всі елементи, що стоять під головною діагоналлю дорівнюють нулю. Після цього за значно спрощеною процедурою знаходять базисний мінор, порядок якого дорівнює рангу даної матриці.

Приклад 2.12. Найти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв’язок. Для зручності переставимо перший і другий рядки.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

{Перший рядок помножимо на (-2) і додамо до другого рядка, потім перший рядок помножимо на 4 і додамо до третього рядка.}

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & -3 & 2\\ 0 & 7 & 10 & 1\\ 0 & -6 & -6 & 11\end{pmatrix}\sim$$ {Третій стовпець помножимо на (-1) і додамо до другого стовпця} $\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & -3 & 10 & 1\\ 0 & 0 & -6 & 11\end{pmatrix}$.

В результаті елементарних перетворень одержали еквівалентну матрицю, в якій під головною діагоналлю розташовані нулі. Не складно помітити, що ця матриця має мінори не вище 3-го порядку. Зручніше всього обчислити той, який містить нулі.

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & -3 & 10\\ 0 & 0 & -6\end{vmatrix}=1\cdot(-3)\cdot(-6)=18\neq 0.$$

Отже $r(A)=3$, тобто мінор M_3 являється базовим для даної матриці.

Практика 2. Операції над матрицями

2.1. Лінійні операції над матрицями

Додавання (віднімання) матриць можна виконувати тільки для матриць однакового розміру, тобто вони мають однакову кількість рядків і стовпців.

Сумою (різницею) матриць *A* і *B*, називається матриця *C*, кожній елемент якої визначається формулою $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$, де a_{ij},b_{ij} - елементи матриць *A*, *B* відповідно.

Задача 2.1. Задані матриці $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0.5 & 3 & -0.4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -0.5 & 6 & 0.3\end{pmatrix}$. Знайти їх суму та різницю.

Розв’язок.

$$A+B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0.5 & 3 & -0.4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -0.5 & 6 & 0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2 & -1-1 & 0+4\\ 0.5-0.5 & 3+6 & -0.4+0.3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -2 & 4\\ 0 & 9 & -0.1\end{pmatrix}.$$

$$A-B=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 0.5 & 3 & -0.4\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -0.5 & 6 & 0.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-2 & -1-(-1) & 0-4\\ 0.5-(-0.5) & 3-6 & -0.4-0.3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ 1 & -3 & -0.7\end{pmatrix}.$$

Добутком матриці А на число λ називається матриця $C=\lambda A$, елементи якої одержують шляхом множення усіх елементів матриці А на число λ, тобто $c_{ij}=\lambda a_{ij}$.

Задача 2.2. Матрицю $A=\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{4}\\ -\frac{5}{2} & 0\\ 1 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$ помножити на число $\lambda = 4$.

Розв'язок. $4A=4\begin{pmatrix}2 & -\frac{3}{4}\\ -\frac{5}{2} & 0\\ 1 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2 & 4\cdot(-\frac{3}{4})\\ 4\cdot(-\frac{5}{2}) & 4\cdot 0\\ 4\cdot 1 & 4\cdot\frac{7}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -3\\ -10 & 0\\ 4 & 14\end{pmatrix}.$

Висновок. Спільний множник всіх елементів матриці можна виносити за знак цієї матриці.

Задача 2.3. Матрицю $A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ спростити так, щоб серед її елементів не було дробів.

Розв'язок. Винесемо $\lambda=\frac{1}{2}$ за знак матриці, поділивши всі її елементи на це число.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1} & -4\cdot\frac{2}{1} & \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{1} \\ -\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{1} & 1\cdot\frac{2}{1} & -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ -7 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Операції додавання (віднімання) матриць та множення матриці на число називаються лінійними операціями над матрицями.

2.2. Множення матриць

Добуток *AB* матриці *A* на матрицю *B* можливий за умови, що кількість стовпців матриці *A* (її ширина) дорівнює кількості рядків матриці *B* (її висоті). В такому випадку матриця *A* узгоджена з матрицею *B*.

Добутком матриці *A* розміру $[m\times k]$ на матрицю *B* розміру $[k\times n]$ називають матрицю *C* розміру $[m\times n]$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*: $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ik}b_{kj}$.

Слід пам'ятати, що із узгодженості матриці *A* з матрицею *B* не слідує узгодженість матриці *B* з матрицею *A*.

Якщо *A* і *B* – квадратні матриці однакового розміру, то матриця *A* узгоджена з матрицею *B*, а матриця *B* узгоджена з матрицею *A*. При цьому не завжди *AB* = *BA*.

Задача 2.4. Знайти добутки матриць:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 5 & -1 & 6 & 2\\ -3 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$.

<u>Розв’язок.</u>

1) $$AB=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-2)\cdot3+0\cdot(-1) & 1\cdot7+(-2)\cdot4+0\cdot0\\ 3\cdot1+(-1)\cdot3+5\cdot(-1) & 3\cdot7+(-1)\cdot4+5\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -5 & 17\end{pmatrix};$$

<u>Зауваження.</u> Ми перемножили матрицю *A* розміром $[2\times3]$ на матрицю *B* розміром $[3\times2]$ і одержали матрицю *C* = *AB* розміром $[2\times2]$.

2) $$AB=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 5 & -1 & 6 & 2\\ -3 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+3\cdot1+2\cdot2+(-1)\cdot3 & 1\cdot3+3\cdot0+2\cdot(-1)+(-1)\cdot4\\ 5\cdot5+(-1)\cdot1+6\cdot2+2\cdot3 & 5\cdot3+(-1)\cdot0+6\cdot(-1)+2\cdot4\\ (-3)\cdot5+1\cdot1+0\cdot2+4\cdot3 & (-3)\cdot3+1\cdot0+0\cdot(-1)+4\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9 & -3\\ 42 & 17\\ -2 & 7\end{pmatrix};$$

3) $AB=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1+2\cdot2+1\cdot3\\0\cdot1+1\cdot2+2\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix};$

4) $AB=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1&2\cdot2&2\cdot3\\1\cdot1&1\cdot2&1\cdot3\\3\cdot1&3\cdot2&3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\1&2&3\\3&6&9\end{pmatrix};$

5) $AB=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}=(1\cdot2+2\cdot4+3\cdot1)=(13).$

Задача 2.5. Для матриць A і B знайти AB та BA, якщо:

1) $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2&-3\\-4&1\end{pmatrix};$

2) $A=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1&-5\\-1&2\end{pmatrix}.$

Розв'язок. Матриці A, B, у обох завданнях, – квадратні однакового розміру, тому матриця A узгоджена з матрицею B, а матриця B узгоджена з матрицею A. На цій підставі можливі добутки AB та BA.

1)

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-3\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot(-4)&1\cdot(-3)+2\cdot1\\4\cdot2+(-1)\cdot(-4)&4\cdot(-3)+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-1\\12&-13\end{pmatrix}$$

;

$$BA=\begin{pmatrix}2&-3\\-4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+(-3)\cdot4&2\cdot2+(-3)\cdot(-1)\\(-4)\cdot1+1\cdot4&(-4)\cdot2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&7\\0&-9\end{pmatrix};$$

$AB\neq BA$

2) $AB=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1+5\cdot(-1)&3\cdot(-5)+5\cdot2\\1\cdot1+2\cdot(-1)&1\cdot(-5)+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5\\-1&-1\end{pmatrix};$

$$BA=\begin{pmatrix}1&-5\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+(-5)\cdot1&1\cdot5+(-5)\cdot2\\(-1)\cdot3+2\cdot1&(-1)\cdot5+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-5\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

$AB = BA$. Такі матриці називають переставними (або комутативними).

Задача 2.6. Для матриці $A=1\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ знайти A^3.

Розв'язок. $A^3 = A\cdot A\cdot A = A^2\cdot A = A\cdot A^2$.

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 3\\ 1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 1+3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 10\end{pmatrix};$$

$$A^3=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 2+5\cdot 1 & 5\cdot 1+5\cdot 3\\ 5\cdot 2+10\cdot 1 & 5\cdot 1+10\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 20\\ 20 & 35\end{pmatrix}.$$

Задача 2.7. Над матрицями $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 2\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2 & -7 & 0\\ -1 & 0 & -5\\ -5 & -4 & 3\end{pmatrix}$ виконати наступні дії: $2A-(A^2+B)\cdot B$.

Розв'язок.

1) $A^2=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+3\cdot(-1)+1\cdot 5 & 2\cdot 3+3\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot 1+3\cdot 4+1\cdot 2\\ (-1)\cdot 2+2\cdot(-1)+4\cdot 5 & (-1)\cdot 3+2\cdot 2+4\cdot 3 & (-1)\cdot 1+2\cdot 4+4\cdot 2\\ 5\cdot 2+3\cdot(-1)+2\cdot 5 & 5\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 3 & 5\cdot 1+3\cdot 4+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 15 & 16\\ 16 & 13 & 15\\ 17 & 27 & 21\end{pmatrix}$$

;

2) $A^2+B=\begin{pmatrix}6 & 15 & 16\\ 16 & 13 & 15\\ 17 & 27 & 21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -7 & 0\\ -1 & 0 & -5\\ -5 & -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8 & 16\\ 15 & 13 & 10\\ 12 & 23 & 24\end{pmatrix};$

3) $(A^2+B)\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 8 & 16\\ 15 & 13 & 10\\ 12 & 23 & 24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -7 & 0\\ -1 & 0 & -5\\ -5 & -4 & 3\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 8\cdot 2+8\cdot(-1)+16\cdot(-5) & 8\cdot(-7)+8\cdot 0+16\cdot(-4) & 8\cdot 0+8\cdot(-5)+16\cdot 3 \\ 15\cdot 2+13\cdot(-1)+10\cdot(-5) & 15\cdot(-7)+13\cdot 0+10\cdot(-4) & 15\cdot 0+13\cdot(-5)+10\cdot 3 \\ 12\cdot 2+23\cdot(-1)+24\cdot(-5) & 12\cdot(-7)+23\cdot 0+24\cdot(-4) & 12\cdot 0+23\cdot(-5)+24\cdot 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -72 & -120 & 8 \\ -33 & -145 & -35 \\ -119 & -180 & -43 \end{pmatrix};$$

4) $$2A=2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \\ 10 & 6 & 4 \end{pmatrix};$$

5) $$2A-(A^2+B)\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \\ 10 & 6 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -72 & -120 & 8 \\ -33 & -145 & -35 \\ -119 & -180 & -43 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 76 & 126 & -6 \\ 31 & 149 & 43 \\ 129 & 186 & 47 \end{pmatrix}.$$

2.3. Транспонування матриць

Матриця A^T називається транспонованою для матриці A, якщо вона одержана із матриці A заміною в ній рядків відповідними стовпцями.

Зауваження. Якщо матриця A має розмір $[m\times n]$, то матриця A^T має розмір $[n\times m]$.

Задача 2.8. Знайти транспоновану матрицю для матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Розв’язок. Перший рядок матриці А заміняємо на перший стовпець матриці A^T другий і третій рядки на другий і третій стовпці відповідно.

$$A^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пояснення. Матриця A має розмір $[3\times 2]$, то матриця A^T має розмір $[2\times 3]$.

<u>Задача 2.9.</u> Обчислити $3A^T-2B$, якщо $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u>

$A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $3\cdot A^T=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}$, $2\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -6 & 10\end{pmatrix}$,

$3A^T-2B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2 & -6 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 15 & 2\end{pmatrix}$.

<u>Доповнення.</u> Якщо A^T і B^T - транспоновані матриці відповідно для матриць А і В, то мають місце наступні рівності:

1) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

2) $(AB)^T=B^TA^T$.

<u>Задача 2.10.</u> Обчислити $(A+B)^T$, якщо $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & -2\\-4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 5\\3 & -1\end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u>

<u>Перший спосіб.</u>

$$(A+B)=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & -2\\-4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 5\\3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9\\1 & 3\\-1 & 0\end{pmatrix};$$

$$(A+B)^T=\begin{pmatrix}3 & 9\\1 & 3\\-1 & 0\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\9 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

<u>Другий спосіб.</u>

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & 5\\3 & -2\\-4 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\5 & -2 & 1\end{pmatrix};$$

$$B^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\-2 & 5\\3 & -1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\4 & 5 & -1\end{pmatrix};$$

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже $(A+B)^T = A^T + B^T$.

<u>Задача 2.11.</u> Знайти $(AB)^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u>

<u>Перший спосіб.</u>

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 & 1\cdot 3 + (-2)\cdot(-2) & 1\cdot(-4) + (-2)\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-2) & 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 7 & -10 \\ 3 & 8 & -11 \end{pmatrix};$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -10 \\ 3 & 8 & -11 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 8 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}.$$

<u>Другий спосіб.</u>

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \; B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; \text{ тоді}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot(-2) & 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) & 3\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) \\ (-4)\cdot 1 + 3\cdot(-2) & (-4)\cdot 2 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 8 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}.$$

Отже $(AB)^T = B^T A^T$.

2.4. Знаходження обернених матриць

Матрицю A^{-1} називають оберненою до матриці A, якщо виконується умова: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця, тобто матриця, в якій кожний елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, а всі інші її елементи дорівнюють нулю.

Щоб знайти обернену матрицю A^{-1}, треба обчислити алгебраїчні доповнення до елементів матриці A, скласти із них матрицю, транспонувати її і поділити на визначник $\det A$.

Звичайно матрицю із алгебраїчних доповнень не записують, а зразу складають транспоновану до неї матрицю відповідно до розташування алгебраїчних доповнень при їх обчисленні.

Нагадаємо, що алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначається за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де M_{ij} – мінор елемента a_{ij} визначника n - го порядку, тобто визначник $(n-1)$ - го порядку, утворений з даного визначника ви кресленням i - го рядка та j - го стовпця.

Зауваження. Обернена матриця існує тільки для невироджених квадратних матриць ($\det A \neq 0$).

Задача 2.12. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Розв'язок.

Обчислимо визначник даної матриці: $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7 \neq 0$, матриця не вироджена, тому для неї існує обернена матриця. Обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |-4| = -4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} |5| = -5;$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} |3| = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} |-2| = -2.$$

Складемо матрицю транспоновану до матриці з алгебраїчних доповнень. Для цього перший рядок алгебраїчних доповнень запишемо першим стовпцем, а другий рядок – другим стовпцем. Одержану матрицю поділимо на $\det A$ та дістанемо наступну обернену матрицю:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для перевірки результату обчислимо добутки:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -8+15 & -6+6 \\ 20-20 & 15-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A^{-1}A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-8+15 & -12+12\\ -10+10 & 15-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E\,;$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E\,.$$

Це означає, що знайдена матриця A^{-1} є оберненою до матриці A.

Задача 2.13. Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Розв'язок.

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1+16-6-4-4-6=-5\,.$$

Отже для матриці A існує обернена матриця A^{-1}. Обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-5\,;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\,;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\,;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-4\,;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\,;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3$$

;

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=6\,;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-10\,;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7\,.$$

Тепер матрицю алгебраїчних доповнень (без формального її запису) транспонуємо, тобто перший рядок (A_{11},A_{12},A_{13}) помістимо в перший стовпець, другий (A_{21},A_{22},A_{23}) і третій (A_{31},A_{32},A_{33}) рядки – відповідно в другий та третій стовпці. Цю матрицю поділимо на визначник $\det A=-5$ та одержимо наступну обернену матрицю:

$$A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & -4 & 6\\ 5 & 5 & -10\\ 5 & 3 & -7\end{pmatrix}.$$

<u>Перевірка:</u>

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}-5 & -4 & 6\\ 5 & 5 & -10\\ 5 & 3 & -7\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5+10-10 & -4+10-6 & 6-20+14\\ -15-5+20 & -12-5+12 & 18+10-28\\ -10+5+5 & -8+5+3 & 12-10-7\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E;$$

$$A^{-1}A=\left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}-5 & -4 & 6\\ 5 & 5 & -10\\ 5 & 3 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5-12+12 & -10+4+6 & 10-16+6\\ 5+15-20 & 10-5-10 & -10+20-10\\ 5+9-14 & 10-3-7 & -10+12-7\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$ розв’язок відповідає умові.

<u>Задача 2.14.</u> Обчислити $4(BA)^{-1}+(3A)^{-1}$, якщо $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

<u>Розв’язок.</u> Обчислимо $C=BA=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 10\\ -6 & -11\end{pmatrix}$.

$$\det C=\begin{vmatrix}-4 & 10\\ -6 & -11\end{vmatrix}=44+60=104.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці C:

$C_{11}=-11$; $C_{12}=6$;
$C_{21}=-10$; $C_{22}=-4$.

За правилом знаходження оберненої матриці запишемо:

$$C^{-1}=(BA)^{-1}=\frac{1}{104}\begin{pmatrix}-11 & -10\\ 6 & -4\end{pmatrix}.$$

$$4(BA)^{-1}=4\cdot\frac{1}{104}\begin{pmatrix}-11 & -10\\ 6 & -4\end{pmatrix}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-11 & -10\\ 6 & -4\end{pmatrix}.$$

Далі знайдемо обернену матрицю A^{-1}: $\det A=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -4\end{vmatrix}=8$.

$A_{11}=-4;\ A_{12}=0;$

$A_{21}=-3;\ A_{22}=-2.$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

$$(3A)^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

$$4(BA)^{-1}+(3A)^{-1}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-11 & -10\\ 6 & -4\end{pmatrix}+\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\frac{12}{312}\begin{pmatrix}-11 & -10\\ 6 & -4\end{pmatrix}+\frac{13}{312}\begin{pmatrix}-4 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{312}\begin{pmatrix}-184 & -159\\ 72 & -74\end{pmatrix}.$$

2.5. Знаходження рангу матриці

Мінор k – го порядку M_k матриці A – це визначник порядку k, який створено із тих її елементів, що стоять на перетині k рядків і k стовпців. При цьому для матриці розміром $[m\times n]$ k менше або дорівнює меншому числу із m,n (записують $k\le\min(m,n)$).

<u>Рангом матриці А</u> називається число r, яке дорівнює найвищому порядку відмінного від нуля її мінору (позначається $r(A)$ або $Rg(A)$).

<u>Базисний мінор</u> – це всякий відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу даної матриці.

Щоб знайти ранг матриці, використовують метод обвідних мінорів або метод елементарних перетворень (див. 2.5).

Ці методи інколи потребують значної кількості обчислень, тому їх не завжди зручно використовувати.

Практично за допомогою елементарних перетворень одержують матрицю, в якій обнулився рядок (стовпець) або дорівнюють нулю всі елементи, розташовані нижче головної діагоналі. Після цього за значно зменшеним обсягом обчислень знаходять базовий мінор, тобто ранг матриці.

Доцільно згадати <u>елементарні перетворення</u>. Це такі елементарні операції:

1) перестановка двох довільних рядків (стовпців);
2) множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;
3) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число;
4) викреслювання рядків (стовпців), усі елементі яких дорівнюють нулю;
5) транспонування матриці.

<u>Задача 2.15.</u> Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u> Розглянемо будь-який мінор другого порядку: $M_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. Отже, ранг цієї матриці $r(A)\geq 2$. Виконаємо елементарні перетворення матриці. Для цього третій стовпець помножимо на (-2) і додамо до першого стовпця:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix} \text{третій стовпець} \\ \text{додамо до другого} \\ \text{стовпця} \end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix} -6 & 7 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim$$

$\cdot 2$

$$\sim\left\{\begin{matrix} \text{другий стовпець} \\ \text{додамо до першого} \\ \text{стовпця} \end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В цій матриці нижче головної діагоналі розташовані нулі. Обчислимо мінор третього порядку (більшого порядку не існує).

$$M_3=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=-3\neq 0.$$

Отже $r(A)=3$, тобто M_3 - базисний мінор.

Зауваження. Ранг квадратної матриці n - го порядку $r(A)=n$, якщо $\det A \neq 0$ (матриця невироджена).

Задача 2.16. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 8 & 15 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. До другого рядка прибавимо перший, помножений на (-3), а до третього – перший, помножений на (-5):

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 8 & 15 \end{pmatrix} \text{(-3)} \quad \text{(-5)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -7 & -10 \end{pmatrix} \text{(-1)}$$

$$\sim \left\{ \begin{matrix} \text{другий рядок прибавимо до} \\ \text{третього, помножений на } (\text{-1}) \end{matrix} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Маємо ступінчату матрицю, в якій нижче головної діагоналі (елементи a_{11}, a_{22}, a_{33}) стоять нулі. Легко помітити, що ця матриця має мінори не вище третього порядку. Зручніше всього обчислити той, що містить одержанні нульові елементи.

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-7)\cdot(-2)=14 \neq 0. \text{ Отже } r(A)=3.$$

Задача 2.17. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 3 & 10 & 6 \\ 8 & 12 & 9 \end{pmatrix}$.

Розв'язок. Транспонуємо задану матрицю, щоб зручніше одержати нулі нижче її головної діагоналі. Для цього рядки матриці запишемо відповідними стовпцями.

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 8\\ 4 & -3 & 10 & 12\\ 0 & 0 & 6 & 9\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{перший рядок помножимо на}\\ (\text{-}4)\ \text{і додамо до другого рядка}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 8\\ 0 & 5 & -2 & -20\\ 0 & 0 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

.

Ця матриця має мінори не вище третього порядку. За спрощеною процедурою обчислимо наступний мінор:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=30\neq 0.\ \text{Отже}\ r(A)=3.$$

<u>Задача 2.18.</u> Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$.

<u>Розв’язок.</u> Для обчислень зручно, щоб елемент a_{11} дорівнював одиниці, тому поміняємо місцями перший і третій стовпці:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot(\text{-}5)\sim\left\{\begin{matrix}\text{до другого рядка прибавимо}\\ \text{перший, а до третього – перший,}\\ \text{помножений на }(\text{-}5)\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 3\\ 0 & -6 & -15 & -9\end{pmatrix}\cdot 3\sim\left\{\begin{matrix}\text{до третього рядка}\\ \text{прибавимо другий,}\\ \text{помножений на 3}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$\sim\{\text{вилучимо третій рядок}\}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$. Ця матриця має мінори не вище другого порядку. $M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$, тому $r(A)=2$.

<u>Задача 2.19.</u> Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ 1 & -3 & -4 & -7\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

<u>Розв’язок.</u> Перший рядок помножимо на (-4) і додамо до другого рядка; до третього і четвертого рядків додамо перший рядок, помножений на (-1) і на (-2) відповідно:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 4 & -1 & -5 & -6\\ 1 & -3 & -4 & -7\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \cdot(-4)\ \cdot(-1)\ \cdot(-2) \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -9 & -9 & -18\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -3 & -3 & -6\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\{\begin{matrix}\text{поділимо другий рядок}\\ \text{на } (-9)\text{, третій на } (-5) \text{ а}\\ \text{четвертий на } (-3)\end{matrix}\right\} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \cdot(-1)\ \cdot(-1)$$

$$\sim \left\{\begin{matrix}\text{другий рядок помножимо}\\ \text{на } (-1) \text{ і додамо до третього}\\ \text{та четвертого рядків}\end{matrix}\right\} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\{\begin{matrix}\text{вилучимо третій і}\\ \text{четвертий рядки}\end{matrix}\right\} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Ця матриця має мінори не вище другого порядку. Обчислимо будь-який із них: $M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Отже $r(A)=2$.

Завдання для самоконтролю

1. Дані матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ і $C=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Знайти: $2A,\ 3B,\ 3A-2B+C,\ A^2-B^2,\ (A-B)(A+B)$.

2. Обчислити AB и BA, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 4\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

3. Знайти AB і BA, якщо $A=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

4. Дані матриці $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & -7 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Знайти : а) A^2+B^2-2AB; б) $(AB)^T-A^T B^T$.

5. Знайти матрицю $2A+A^2-A^3$, якщо $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

6. Дані матриці $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ і $C=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$.

Обчислити: а) ABC; б) $C^T B^T A^T$.

7. Для даних матриць $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -7\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ знайти обернені A^{-1} и B^{-1}.

8. Довести, що матриця $A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ -18 & 1 & 24\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$ є оберненою для матриці $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

9. Дані матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$.

Знайти: а) $(AB)^{-1}-A^{-1}B^{-1}$; б) $\left(A^{-1}B\right)^{-1}-B^{-1}A$.

10. Обчислити ранг матриці A, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 6 & -2 & -4\\ -12 & 4 & 8\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 6 & -2 & -10\end{pmatrix}$

;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 7 & 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4 & 3 & 1\\ 3 & 5 & -1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

11. Дані матриці $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ і $C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. Знайти невідому матрицю X із рівнянь:

а) $AX=B$; б) $XB=C$; в) $AXB=C$; г) $ABX(C-A)=A+B$.

12. Дани матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 5\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 5\end{pmatrix}$. Розв’язати матричні рівняннь: а) $AX=B$; б) $XA=B^T$.

Відповіді

1. $2A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 6 & -8\end{pmatrix}$; $3B=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 6 & 9\end{pmatrix}$; $3A-2B+C=\begin{pmatrix}5 & -8\\ 8 & -14\end{pmatrix}$;

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -13 & 1\end{pmatrix};\quad (A-B)(A+B)=\begin{pmatrix}-10 & -2\\ -35 & 5\end{pmatrix}.$$

2. $AB=\begin{pmatrix}11 & 5\\ 36 & -9\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 13 & -10 & 11\\ 1 & 11 & 10\end{pmatrix}$.

3. $AB=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 3 & -6 & -9\\ -4 & 8 & 12\end{pmatrix}$; $BA=(4)$.

4. а) $A^2+B^2-2AB=\begin{pmatrix}-10 & 33 & 2\\ -13 & 31 & 9\\ -10 & 14 & 15\end{pmatrix}$;

б) $(AB)^T-A^TB^T=\begin{pmatrix}11 & -3 & 3\\ -20 & -8 & -8\\ -3 & 9 & -3\end{pmatrix}$.

5. $2A+A^2-A^3=\begin{pmatrix}30 & -28\\ -42 & 44\end{pmatrix}$.

6. а) $ABC=\begin{pmatrix}5\\ 15\\ 25\\ 35\end{pmatrix}$; б) $C^TB^TA^T=\begin{pmatrix}5 & 15 & 25 & 35\end{pmatrix}$.

7. $A^{-1}=\begin{pmatrix}7/2 & -3/2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$; $B^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

8. $A^{-1}A=AA^{-1}=E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

9. а) $(AB)^{-1}-A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}-8/25 & -2/25\\ 12/25 & 8/25\end{pmatrix}$;

б) $\left(A^{-1}B\right)^{-1}-B^{-1}A=\theta=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

10. а) $r(A)=3$; б) $r(A)=1$; в) $r(A)=2$; г) $r(A)=3$; д) $r(A)=4$.

11. а) $X=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}-3/2 & -7/2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$;

в) $X=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ -7/4 & -17/4\end{pmatrix}$; г) $X=\begin{pmatrix}3/5 & 7/10\\ 9/10 & 21/20\end{pmatrix}$.

12. а) $X=\begin{pmatrix}33/4\\ 11/2\\ 5/4\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$.

Тема 3. Системи лінійних алгебраїчних рівняння

3.1. Основні означення

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.1)$$

Коефіцієнти a_{ij} при невідомих x_j мають два індекси. Перший індекс вказує на порядковий номер рівняння, в якому знаходиться цей коефіцієнт, другий – на номер невідомого. Величини b_i $(i = \overline{1,m})$ називаються вільними членами.

Кожне з m рівнянь цієї системи містить невідомі x_j у першому стєпені, тому маємо систему m лінійних рівнянь з n невідомими. Система зветься однорідною, коли всі її вільні члени дорівнюють нулю. Якщо хоча б одне з чисел b_i відмінне від нуля, то така система буде неоднорідною.

Розв'язком системи (3.1) називається кожна сукупність чисел $c_1, c_2, ..., c_n$, яка, будучі підставлена в цю систему замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ перетворює всі її рівняння в рівності (тотожності).

Величини $b_1, b_2, ..., b_m$ виникають з величин $x_1, x_2, ..., x_n$ у результаті застосування відносно останніх двох операцій – множення на деякі числа a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$та додавання. Такі операції називаються лінійними. Кажуть, що кожна з величин b_i є лінійною комбінацією величин $x_1, x_2, ..., x_n$. Система (3.1) здійснює лінійні перетворення величин x_j $(j = 1, 2, ..., n)$ на величини b_i $(i = 1, 2, ..., m)$.

Якщо система (3.1) має хоча б один розв'язок, то вона сумісна. Якщо система (3.1) не має жодного розв'язку, то вона зветься несумісною.

Сумісна система, яка має тільки один розв'язок, називається визначеною, яка має нескінченну множину розв'язків - невизначеною.

Дві або декілька систем лінійних рівнянь звуться еквівалентними, якщо кожен розв'язок однієї системи є розв'язком іншої системи рівнянь, або якщо кожна з цих систем несумісна.

Елементарні перетворення системи рівнянь (3.1) передбачають виконання наступних дій:

а) переставлення двох рівнянь;

б) множення обох частин будь-якого рівняння на число, що не дорівнює нулю;

в) додавання до одного з рівнянь системи іншого рівняння, помноженого на деяке число, відмінне від нуля;

г) вилучення з системи нульового рівняння, в якого всі коефіцієнти a_{ij} і вільні члени b_i дорівнюють нулю.

Зауваження. У результаті елементарних перетворень системи лінійних рівнянь (3.1) одержуємо еквівалентну їй систему.

3.2. Розв'язок лінійної системи з однаковою кількістю рівнянь і невідомих

3.2.1. За формулами Крамера

Розглянемо систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (3.2)$$

Вилучимо з неї x_2, для чого перше рівняння помножимо на a_{22}, друге – на $(-a_{12})$ і виконаємо додавання одержаних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 = -b_2a_{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 + (a_{12}a_{22} - a_{22}a_{12})x_2 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \Rightarrow$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad (3.3)$$

Складемо визначник Δ з коефіцієнтів системи (3.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3.4}$$

Далі в цьому визначнику замінимо стовпець коефіцієнтів при невідомій x_1 стовпцем вільних членів, в результаті одержимо визначник Δ_1, а саме:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2 \tag{3.5}$$

Порівнюючи виразі (3.3), (3.4), (3.5), маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{ аналогічно } x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{3.6}$$

де визначник Δ_2 утворено з визначника Δ заміною в ньому стовпця коефіцієнтів при невідомій x_2 стовпцем вільних членів, тобто

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

Тепер розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими при заданій матриці А її коефіцієнтів.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nj}x_j + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3.7}$$

Детермінант $\Delta = \det A$, відповідає матриці коефіцієнтів $A = (a_{ij})$ системи (3.7), називають визначником системи.

Кожний допоміжний визначник $\Delta_j \ (j = 1, 2, ... n)$ утворюють із визначника Δ заміною в ньому j - го стовпця коефіцієнтів стовпцем вільних членів, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

На підставі формул (3.6) і прийнятого позначення визначників (3.8.) запишемо формули для розв'язку системи (3.7)

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{3.9}$$

Формули (3.9) називають формулами Крамера.

За результатами обчислення визначників (3.8) справедливі такі твердження:

а) якщо $\Delta \neq 0$, то система визначена, тобто має тільки один розв'язок. Його можна знайти за формулами (3.9);

б) якщо $\Delta = 0$ та хоча б один з визначників $\Delta_j \neq 0$, то система несумісна, тобто не має жодного розв'язку;

в) у випадку, коли усі визначники (3.8) дорівнюють нулю, а саме $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, ..., $\Delta_n = 0$, система або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків. Для однозначного висновку потрібне додаткове дослідження.

<u>Приклад 3.1.</u> За формулами Крамера розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -16 - 24 + 30 - 80 - 24 - 6 = -120 \cdot$$

$\Delta = -120$, система визначена, тому її розв'язок шукаємо за формулами (3.9).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & 1 & -4 \\ -7 & -4 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -160 + 56 + 18 - 48 - 240 + 14 = -360,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 20 & -4 \\ 3 & -7 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -28 - 36 + 600 - 140 - 36 - 120 = 240,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 20 \\ 3 & -4 & -7 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 120 - 35 + 400 + 28 - 9 = 480.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-360}{-120} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{240}{-120} = -2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{480}{-120} = -4.$$

Відповідь. $x_1 = 3; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = -4.$

3.2.2. Матричний метод (спосіб)

Нехай задана система лінійних рівнянь (3.7). Матриця A, складена з її коефіцієнтів, тобто матриця системи має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.10)$$

Введемо до розгляду матриці – стовпці невідомих і вільних членів та зробимо їх відповідні записи

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_j \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_i \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (3.11)$$

Враховуючі прийняті позначення, систему (3.7) можна записати так:

$$AX=B. \qquad (3.12)$$

Цей запис зветься матричною формою запису системи (3.7).

Якщо $\det A \neq 0$, то матриця A називається невиродженою і для неї існує обернена матриця A^{-1} (див. 2.4), тобто

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(A_{ij}^{T}) \qquad (3.13)$$

де A_{ij} - алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A; матриця A_{ij}^{T} транспонована щодо матриці A_{ij}, $A_{ij}^{T}=A_{ji}$.

Згадаємо, що алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} матриці A визначається формулою:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (3.14)$$

де M_{ij} - мінор елемента a_{ij}.

Так для матриці (3.10) маємо $A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Помножимо співвідношення (3.12) зліва на A^{-1}. Тоді отримаємо $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Враховуючи, що $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = X$, де E - одинична матриця, отримаємо

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (3.15)$$

Отже, якщо $\det A \neq 0$, то система (3.7) визначена, тобто має єдиний розв'язок, який визначається співвідношенням (3.15). Знаходження розв'язку системи (3.7) за формулою (3.15) називається матричним способом розв'язування системи лінійних рівнянь.

Приклад 3.2. Розв'язати систему рівнянь матричним способом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 15 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ -4x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 8 \end{cases}.$$

Розв'язок. Запишемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 9 - 8 + 8 + 12 + 18 = 63.$$

Визначник $\det A = 63 \neq 0$, тому існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці *A*.

Маємо

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 17.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 9; \; A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 16; \; A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -2.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \; A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7; \; A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Отже $A^{-1} = \dfrac{1}{63}\begin{pmatrix} 18 & 9 & 0 \\ -10 & 16 & 7 \\ 17 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$

Згідно з (3.15)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{63}\begin{pmatrix} 18 & 9 & 0 \\ -10 & 16 & 7 \\ 17 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{63}\begin{pmatrix} 270-18+0 \\ -150-32+56 \\ 255+4+56 \end{pmatrix} = \frac{1}{63}\begin{pmatrix} 252 \\ -126 \\ 315 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

<u>Відповідь:</u> $x_1 = 4; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 5.$

<u>3.2.3. Метод Гаусса. (Метод послідовного вилучення невідомих)</u>

Розв'язок системи лінійних рівнянь методом Гаусса здійснюється в два етапи. На першому етапі (прямий хід) елементарними перетвореннями із системи (3.7) послідовно виключаються невідомі, що розташовані нижче головної діагоналі. В результаті система (3.7) зводиться до еквівалентної системи трикутного вигляду. Система лінійних рівнянь називається трикутною, якщо її коефіцієнти складають верхню трикутну матрицю, в якій всі елементи, розташовані під головною діагоналлю, дорівнюють нулю. Так системі (3.7) еквівалентна наступна трикутна система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2j}x_j + \ldots + c_{2n}x_n = p_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad d_{ij}x_j + \ldots + d_{in}x_n = h_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad l_{nn}x_n = g_n \end{cases} \qquad (3.16)$$

На другому етапі (зворотній хід) послідовно визначають невідомі з еквівалентної системи (3.16). Для цього з останнього її рівняння знаходять x_n, потім за величиною x_n знаходять x_{n-1} з $(n-1)$-го рівняння і так далі. Послідовне знаходження невідомих триває поки не буде знайдено x_1 із першого рівняння.

При розв'язку системи лінійних рівнянь методом Гаусса можлива наступні випадки:

1. Кількість рівнянь еквівалентної системи k співпадає з кількістю невідомих n ($k = n$). Це система трикутного вигляду (3.16), її останнє рівняння містить тільки одну невідому (типу $l_{nn}x_n = g_n$, де $l_{nn} \neq 0$), яка однозначно визначається розв'язком цього рівняння.

Отже, вихідна система має тільки один розв'язок, тобто визначена.

2. Кількість рівнянь еквівалентної системи менше кількості невідомих ($k < n$). Вихідна система сумісна і має нескінченну множину розв'язків (невизначена). В цьому випадку k невідомих вважають основними, а $n-k$ невідомих – вільними, які позначають довільними константами. Розв'язок системи m лінійних рівнянь з n невідомими розглянуто в розділі (3.4).

3. Якщо в еквівалентній системі появилась неможлива рівність типу $0 = g_n$, де $g_n \neq 0$, вихідна система не має жодного розв'язку (несумісна).

Перехід до еквівалентної системи (3.15) зручно виконувати у матричній формі. Для цього записують розширену матрицю A^* вихідної системи (3.7), яку одержують з основної матриці A цієї системи, складеної з її коефіцієнтів a_{ij}, дописуванням до неї стовпця вільних членів. Тобто

$$A = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \qquad (3.17)$$

Піддаючи елементарним перетворенням матриці A^*, створюють верхню трикутну матрицю і відповідно до неї записують еквівалентну систему (3.16).

Приклад. 3.3. Розв’язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 9 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + 64x_2 + 85x_3 + 30x_4 = -11 \end{cases}.$$

Розв’язок. Перший етап (прямий хід).

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -3 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 64 & 85 & 30 & -11 \end{array}\right)$$

Для зручності розв’язку бажано, щоб коефіцієнт при x_1 в першому рядку дорівнював одиниці ($a_{11} = 1$), тому другий рядок помножимо на (-1) і додамо до першого рядка. Після цього за допомогою подальших елементарних перетворень створимо верхню трикутну матрицю. А саме

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -3 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 64 & 85 & 30 & -11 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & -5 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 64 & 85 & 30 & -11 \end{array}\right) \cdot(-2)\cdot(-4) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{перший рядок} \\ \text{помножимо на (-2) і на (-4)} \\ \text{та додамо до 2-го, 3-го} \\ \text{та 4-го рядків} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 12 & 13 & 8 & 17 \\ 0 & 21 & 21 & 10 & 19 \\ 0 & 84 & 105 & 38 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-7) \\ \cdot 4 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{другий рядок} \\ \text{помножимо на (-7),} \\ \text{третий на 4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -84 & -91 & -56 & -119 \\ 0 & 84 & 84 & 40 & 76 \\ 0 & 84 & 105 & 38 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{другий рядок} \\ \text{додамо до 3-го} \\ \text{і 4-го рядків} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -84 & -91 & -56 & -119 \\ 0 & 0 & -7 & -16 & -43 \\ 0 & 0 & 14 & -18 & -114 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{l} \text{третий рядок} \\ \text{помножимо на 2} \\ \text{і додамо до 4-го рядка} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -5 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -84 & -91 & -56 & -119 \\ 0 & 0 & -7 & -16 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & -50 & -200 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-7) \\ :(-1) \\ :(-50) \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}\text{другий рядок} \\ \text{поділимо на (-7),} \\ \text{третий на (-1),} \\ \text{четвертий на (-50)}\end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -5 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 12 & 13 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & 7 & 16 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right)$$

Одержали верхню трикутну матрицю, відповідно до неї запишемо еквівалентну систему трикутного вигляду: $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -4 \\ 12x_2 + 13x_3 + 8x_4 = 17 \\ 7x_3 + 16x_4 = 43 \\ x_4 = 4 \end{cases}$

.

Другий етап (зворотний хід).

Кількість рівнянь еквівалентної системи дорівнює кількості невідомих ($k = n = 4$), тобто, вихідна система має тільки один розв'язок (визначена).

Виконаємо розв'язок еквівалентної системи в напрямку знизу уверх. Із четвертого рівняння маємо $x_4 = 4$. Враховуючи це значення , розв'яжемо третє рівняння. $7x_3 + 16 \cdot 4 = 43 \Rightarrow x_3 = -3.$

Перейдемо до другого рівняння $12x_2 + 13 \cdot (-3) + 8 \cdot 4 = 17 \Rightarrow x_2 = 2$.

Тепер розв'яжемо перше рівняння $x_1 - 5 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 = -4 \Rightarrow x_1 = -1$.

Відповідь: $x_1 = -1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = -3; \quad x_4 = 4.$

Перевірка свідчить, що розв'язок задовольняє вихідній системі.

3.3. Дослідження систем лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

Поняття рангу матриць (див. 2.5) використовують при розв'язуванні питання про сумісність системи лінійних рівнянь. Звернемось до системи лінійних рівнянь (3.1), основну матрицю якої A складемо з коефіцієнтів при її невідомих, розширену матрицю цієї системи A^* здобудемо дописуванням до матриці A стовпця вільних членів. Для зручності матрицю A розміщують ліворуч від вертикальної штрихової лінії в матриці A^*, тобто

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Доцільно згадати. Ранг матриці – це найвищий порядок відмінного від нуля її мінора. Максимальне число лінійно незалежних рядків усякої матриці дорівнює максимальному числу її незалежних стовпців, тобто дорівнює рангові даної матриці. Знаходження рангу матриці спрощується при застосуванні наступних елементарних перетворень:

1) перестановка двох паралельних рядів;
2) множення кожного елемента ряду на будь-яке число λ, відмінне від нуля;
3) додавання до елементів ряду відповідних елементів паралельного ряду, помножених на одне і теж число.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, аби ранг основної матриці системи дорівнював рангові її розширеної матриці. Тобто $r(A) = r(A^*)$.

Сумісна система, для якої виконується умова цієї теореми, залежно від величини рангу матриці $r(A)$ може бути визначеною або невизначеною. Якщо $r(A) = n$, де n - число невідомих системи, тоді ця система визначена, тобто має тільки один розв'язок.

Коли $r(A) < n$ система невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Якщо $r(A) \neq r(A^*)$ система несумісна, тобто не має жодного розв'язку.

<u>Приклад 3.4</u>. Дослідити систему на сумісність. У випадку сумісності розв'язати її.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - 11x_2 - 4x_3 = 6 \\ -4x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

Розв'язок. Знайдемо ранги основної та розширеної матриць, відповідно $r(A); r(A^*)$. Для цього запишемо розширену матрицю системи A^* і виконаємо елементарні перетворення.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 20 \\ 3 & -11 & -4 & 6 \\ -4 & 5 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \cdot(-3)\cdot 4 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок помножимо на} \\ \text{(-3) і додамо до 2-го, а потім} \\ \text{перший рядок помножимо на} \\ \text{4 і добавимо до 3-го рядка} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & -10 & -54 \\ 0 & -11 & 9 & 89 \end{array}\right) \cdot 11 \sim \left\{\begin{array}{l} \text{другий рядок помножимо на} \\ \text{11 і додамо до 3-го рядка} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & -10 & -54 \\ 0 & 0 & -101 & -505 \end{array}\right) : (-101) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{третий рядок} \\ \text{поділимо на} \\ \text{(-101)} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & 20 \\ 0 & 1 & -10 & -54 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Для матриці A максимальний порядок мінору дорівнює 3, зокрема

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \; M_3 \neq 0, \text{ отже } r(A) = 3.$$

Для розширеної матриці можна також скласти мінор 3-го (максимального) порядку, наприклад

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & -54 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5.\ M_3 \neq 0, \text{ отже } r(A^*) = 3.$$

Маємо $r(A) = r(A^*) = n = 3.$ Система має тільки один розв'язок, тобто визначена. Виконаємо розв'язок вихідної системи методом Гаусса. Останній запис розширеної матриці A^* має вигляд верхньої трикутної матриці. Відповідно до неї запишемо систему трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ \quad x_2 - 10x_3 = -54 \\ \qquad\qquad x_3 = 5 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи в напрямку знизу уверх маємо:

$$\begin{cases} x_3 = 5 \\ x_2 - 10 \cdot 5 = -54 \Rightarrow x_2 = -4 \\ x_1 - 4 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 = 20 \Rightarrow x_1 = -6 \end{cases}.$$

Відповідь: $x_1 = -6; \quad x_2 = -4; \quad x_3 = 5.$

3.4. Розв'язок системи лінійних рівнянь загального вигляду

Нехай задано систему (3.1), яка містить m рівнянь з n невідомими. Припустимо, що ранг її основної та розширеної матриць дорівнює числу $r, (r(A) = r(A^*) = r)$, тоді, згідно з теоремою Кронекера-Капеллі ця система сумісна.

Зауваження. Система з n рівнянь з n невідомими при $r < n$ зводиться до загального вигляду, тобто до еквівалентної системи r рівнянь з n невідомими.

Згадаємо. Базисним мінором матриці зветься всякий відмінний від нуля її мінор, порядок якого дорівнює рангові даної матриці.

Для зручності, не обмежуючи загальності, можна припустити, що базисний мінор основної матриці знаходиться у лівому верхньому куті цієї матриці. Такий випадок, при бажанні, одержують переставленням в системі (3.1) відповідних рівнянь і невідомих.

При вказаному припущенні перші r - рядки є базисними, тому кожен з рядків розширеної матриці, розпочинаючи з $(r+1)$ - го рядка, представляє собою лінійну комбінацію перших r - рядків цієї матриці. Такий рядок завдяки елементарним перетворенням стає нульовим і, звісно, вилучається із матриці.

Згадаємо. Якщо рядок є лінійною комбінацією інших рядків, то він отриманий в наслідок лінійних операцій над ними (додавання і множення на число). Звідси виходить, що кожен розв'язок r - перших рівнянь системи є також розв'язком усіх інших її рівнянь.

Отже, достатньо знайти всі розв'язки r - перших рівнянь системи, за якими знаходяться базисні невідомі $x_1, x_2, ...x_r$. Для цього в системі (3.1) відкинемо рівняння починаючі з $(r+1)$ - го, вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, ...x_n$ надамо довільні значення, відповідно $C_{r+1}, C_{r+2}, ...C_n$, та доданки з ними перенесемо праворуч. В результаті отримаємо r лінійних рівнянь з r невідомими, а саме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}C_{r+1} - ... - a_{1n}C_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}C_{r+1} - ... - a_{2n}C_n \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_n - a_{r(r+1)}C_{r+1} - ... - a_{rn}C_n \end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи можна знайти одним з методів, розглянутих в розділі 3.2.

<u>Приклад 3.5.</u> Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 5x_1 - 10x_2 - 9x_3 - 2x_4 = -3. \\ 4x_1 - 8x_2 - 11x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}$$

<u>Розв'язок.</u> Спочатку за теоремою Кронекера-Капеллі виконаємо дослідження сумісності цієї системи. Для цього знаходимо ранги її основної і розширеної матриць, відповідно $r(A)$ і $r(A^*)$.

$$=\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 2 & 3 & 4\\ 5 & -10 & -9 & -2 & -3\\ 4 & -8 & -11 & -5 & -7\end{array}\right)\begin{matrix}\cdot(-5) & \cdot(-4)\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{перший рядок помножимо}\\ \text{на (-5) і (-4) і додамо до}\\ \text{2-го та 3-го рядків}\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -19 & -17 & -23\\ 0 & 0 & -19 & -17 & -23\end{array}\right)\cdot(-1)\sim\left\{\begin{matrix}\text{другий рядок помножимо}\\ \text{на (-1) і додамо до 3-го рядка}\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -19 & -17 & -23\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left\{\begin{matrix}\text{вилучимо 3-й рядок,}\\ \text{який обнулився}\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & -19 & -17 & -23\end{array}\right)$$

В основній і розширеній матрицях є мінори другого порядку, які не дорівнюють нулю; не нульових мінорів третього і вище порядків немає. Отже, $r(A)=r(A^*)=2<n=4$. Система сумісна і має безліч розв'язків. Тобто невизначена.

Для зручності розглянемо наступний мінор: $M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -19\end{vmatrix}=-19\neq 0$.

Він складений першим і третім стовпцями еквівалентної матриці. В даному випадку це базисний мінор. Так як до нього не ввійшов третій рядок, відповідно третє рівняння вихідної системи відкидаємо. Воно є лінійною комбінацією перших двох рівнянь, а саме отримано відніманням 1-го із 2-го. Отже, розв’язок перших двох рівнянь системи є розв’язком і третього її рівняння. Коефіцієнти при невідомих x_2 та x_4 теж не ввійшли до базисного мінору, тому їх приймаємо за вільні невідомі. Враховуючі приведені пояснення, запишемо наступну систему двох рівнянь з двома невідомими x_1 і x_3:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4 + 2x_2 - 3x_4 \\ 5x_1 - 9x_3 = -3 + 10x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

Надамо вільним невідомим значення довільних сталих, а саме: $x_2 = C_1,\ x_4 = C_2$. Згідно з прийнятими позначеннями маємо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4 + 2C_1 - 3C_2 \\ 5x_1 - 9x_3 = -3 + 10C_1 + 2C_2 \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи виконаємо методом Гаусса.

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 + 2C_1 - 3C_2 \\ 5 & -9 & -3 + 10C_1 + 2C_2 \end{array}\right) \cdot (-5) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок помножимо} \\ \text{на (-5) і додамо до 2-го рядка} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 + 2C_1 - 3C_2 \\ 0 & -19 & -23 + 17C_2 \end{array}\right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 + 2C_1 - 3C_2 \\ 0 & 19 & 23 - 17C_2 \end{array}\right)$$

Відповідно до цієї матриці запишемо еквівалентну систему трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4 + 2C_1 - 3C_2 \\ \quad 19x_3 = 23 - 17C_2 \end{cases}.$$

Знаходимо невідомі x_1 і x_3 розв'язком знизу уверх.

$$19x_3 = 23 - 17C_2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{19}(23 - 17C_2);$$

$$x_1 + 2x_3 = 4 + 2C_1 - 3C_2 \Rightarrow x_1 + 2\frac{1}{19}(23 - 17C_2) = 4 + 2C_1 - 3C_2 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{30}{19} + 2C_1 - \frac{23}{19}C_2; \quad \text{або} \quad x_1 = \frac{1}{19}(30 + 38C_1 - 23C_2).$$

Отже, загальний розв'язок вихідної системи має вигляд

$$x_1=\frac{1}{19}(30+38C_1-23C_2),\quad x_2=C_1,\quad x_3=\frac{1}{19}(23-17C_2),\quad x_4=C_2.$$

Виконаємо перевірку розв'язку.

Нехай $C_1=-1,\quad$ а $\quad C_2=-2$, тоді

$$x_1=\frac{1}{19}(30+38\cdot(-1)-23\cdot(-2))=2,\quad x_3=\frac{1}{19}(23-17\cdot(-2))=3.$$

Частковий розв'язок системи стосовно прийнятих значень C_1 та C_2:

$x_1=2,\quad x_2=-1,\quad x_3=3,\quad x_4=-2.$

Підставимо ці значення у вихідну систему

$$\begin{cases} 2-2\cdot(-1)\;+\;2\cdot 3\;+\;3\cdot(-2)=4 \\ 5\cdot 2-10\cdot(-1)-\;9\cdot 3\;-\;2\cdot(-2)=-3 \\ 4\cdot 2-8\cdot(-1)\;-\;11\cdot 3-\;5\cdot(-2)=-7 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 4\equiv 4,\ \text{тотожність} \\ -3\equiv -3,\ \text{тотожність} \\ -7\equiv -7,\ \text{тотожність} \end{cases}.$$

<u>Висновок.</u> Вихідна система лінійних рівнянь розв'язана вірно.

3.5. Системи лінійних однорідних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю. Представимо її у загальному вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1j}x_j+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2j}x_j+...+a_{2n}x_n=0 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mj}x_j+....+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \qquad (3.17)$$

Матричний її запис має вигляд $AX=O$, де A - основна матриця системи, що складена з її коефіцієнтів, X - матриця стовпець невідомих і O- нульова матриця - стовпець вільних членів.

Згадаємо, що розширену матрицю A^* системи одержують з її основної матриці дописуванням до неї стовпця вільних членів. Отже, розширена матриця однорідної системи відрізняється від її основної матриці тільки стовпцем, який складено з нулів, тобто матриці A і A^* співпадають, тому їх ранги однакові $r(A) = r(A^*) = r$. Звідси висновок. Однорідна система рівнянь (3.17) завжди сумісна, а саме:

якщо $r = n$, де n число невідомих, система має тільки нульовий розв'язок $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad ...., \quad x_n = 0$, який називається тривіальним розв'язком;

якщо $r < n$ (практично, якщо кількість рівнянь системи менше за кількість її невідомих), то однорідна система має нескінченну множину розв'язків, один з яких нульовий.

Тепер розглянемо однорідну систему n рівнянь з n невідомими (коли $m = n$). Основна матриця такої системи квадратна, тому для неї існує наступний визначник:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В залежності від його значення однорідна система n рівнянь з n невідомими має:

а) нескінченну множину розв'язків (тобто нетривіальний розв'язок) тоді і тільки тоді, коли $\det A = 0$;

б) тільки нульовий (тривіальний) розв'язок, коли $\det A \neq 0$.

Основні властивості розв'язків однорідної системи рівнянь.

1. Якщо $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - розв'язок системи (3.17), то і $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n$ (де $\lambda - const$) теж буде розв'язком цієї системи.

2. Якщо числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ і $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ - відповідно розв'язки системи (3.17), то і сума $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n$ буде розв'язком цієї системи.

Звідси висновок. Будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідної системи також є розв'язком цієї системи.

Нехай система (3.17) має нескінченну множину розв'язків ($r < n$) і базисний мінор розташований у верхньому лівому куті матриці. Запишемо її у вигляді системи перших r рівнянь з r невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = -a_{r(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Визначник порядку r цієї системи не дорівнює нулю, тому вона сумісна. Надамо вільним невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, ...x_n$ довільні значення $C_{r+1}, C_{r+2}, ...C_n$, та розглянемо наступну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1(r+1)}C_{r+1} - ... - a_{1n}C_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2(r+1)}C_{r+1} - ... - a_{2n}C_n \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = -a_{r(r+1)}C_{r+1} - ... - a_{rn}C_n \end{cases}$$

Дану систему розв'яжемо за формулами Крамера або методом Гаусса, тобто знайдемо вирази для базисних невідомих через вільні константи, а саме

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}C_{r+1} + b_{12}C_{r+2} + ... + b_{1n}C_n \\ x_2 = b_{21}C_{r+1} + b_{22}C_{r+2} + ... + b_{2n}C_n \\ .... \\ x_r = b_{r1}C_{r+1} + b_{r2}C_{r+2} + ... + b_{rn}C_n \end{cases} \qquad (3.18)$$

Це є загальний розв'язок однорідної системи рівнянь (3.17). На його основі для кожної конкретної множини значень $C_{r+1}, C_{r+2}, ...C_n$ знаходяться відповідні значення базисних невідомих $x_1, x_2, ...x_r$. Таких множин може бути безліч, тому система (3.17) має безліч розв'язків. Якщо серед цих розв'язків знайти максимальну кількість лінійно незалежних, то будь-який інший розв'язок цієї системи можна одержати у вигляді їх лінійної комбінації.

Фундаментальною (основною) системою розв’язків для однорідної системи лінійних рівнянь (3.17) зветься лінійно незалежна система розв’язків, через яку лінійно виражається будь-який розв’язок цієї системи.

В залежності від співвідношення між рангом r і кількістю невідомих n мають наступні випадки:

а) якщо $r < n$, то однорідна система має нескінченну множину фундаментальних систем розв’язків, причому кожна з них містить $n - r$ розв’язків;

б) якщо $r = n$, однорідна система не має фундаментальної системи розв’язків.

Для знаходження фундаментальної системи розв’язків послідовно кожній довільній константі, якою позначена вільна невідома, надають значення одиниці іншим – нулі. При цьому отримують $n - r$ множин значень довільних констант:

1) $C_{r+1} = 1, C_{r+2} = C_{r+3} = ... = C_n = 0$;

2) $C_{r+1} = 0, C_{r+2} = 1, C_{r+3} = ... = C_n = 0$;

3) ………………………………………..

$n - r$) $C_{r+1} = C_{r+2} = C_{r+3} = ... = 0, C_n = 1.$

Для кожної такої множини констант використовуючи загальний розв’язок системи (3.18), знаходять її конкретний розв’язок

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ ... \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ ... \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}; ...; X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ x_2^{n-r} \\ ... \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix},$$

де $X_1, X_2, ..., X_{n-r}$ - матриці – стовпці розв’язків.

Ці розв’язки утворюють фундаментальну систему розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь. Лінійна комбінація фундаментальної системи розв’язків типу $X = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_{n-r}X_{n-r}$ містить будь-який розв’язок системи (3.17), тому вона визначає загальний розв’язок даної системи.

Приклад 3.6. Знайти загальний розв’язок і фундаментальну систему розв’язків для наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2\,x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Розв’язок. Визначимо ранг основної матриці даної системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{Для зручності переставимо} \\ \text{1-й і 2-й рядки} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-3) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{перший рядок помножимо на} \\ \text{(-3), (-4) і знов на (-3) і додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го і 4-го рядків} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :(-3) \\ :2 \end{array} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{третий рядок поділимо на} \\ \text{(-3), другий - на 2} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\{\text{вилучимо нульові рядки}\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 5\end{pmatrix}\cdot(-1)\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 0 & 1 & 6 & -5\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює двом ($r(A)=2$), бо вона містить мінор 2-го порядку, який не дорівнює нулю. Мінори третього і більшого порядку відсутні. Позначимо $r=r(A)=2$.

Для зручності скористуємось мінором, створеним 1-м та 2-м стовпцями, а саме: $M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Його приймаємо за базовий мінор. Ранг матриці A менший за число невідомих ($r<n=4$), тому задана однорідна система має безліч розв’язків (не тільки тривіальний).

До базового мінору не ввійшли 3-й і 4-й рядки матриці A, отже відповідні рівняння системи – це лінійна комбінація перших двох. За зробленим висновком трете і четверте рівняння вилучимо з розв’язку. До базового мінору також не потрапили 3-й і 4-й стовпці, тому базисними невідомими вважаємо x_1, x_2, а x_3, x_4 - вільними. З цих міркувань запишемо еквівалентну систему і виконаємо наступні розв’язки:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\\ \qquad x_2+6x_3-5x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-4x_3+3x_4\\ \qquad x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2(-6x_3+5x_4)-4x_3+3x_4\\ x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=8x_3-7x_4\\ x_2=-6x_3+5x_4\end{cases}.$$

Позначимо x_3, x_4 довільними константами, а саме: $x_3=C_1, x_4=C_2$.

На підставі виразів, одержаних для x_1, x_2, та застосованих позначень запишемо загальний розв’язок системи:

$$x_1 = 8C_1 - 7C_2, \quad x_2 = -6C_1 + 5C_2, \quad x_3 = C_1, \quad x_4 = C_2.$$

Покладемо: 1) $C_1 = 1, C_2 = 0$; 2) $C_1 = 0, C_2 = 1$. Для цих значень із загального розв'язку отримаємо два лінійно незалежних розв'язки, що утворюють фундаментальну систему розв'язків:

1) $x_1 = 8, \quad x_2 = -6, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0$;

2) $x_1 = -7, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1$.

Цю систему розв'язків запишемо за допомогою наступних матриць - стовпців:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок заданої однорідної системи лінійних рівнянь можна записати за допомогою фундаментальної системи у вигляді:

$$X = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_2,$$

або скористуватись матрицями, транспонованими до матриць X_1, X_2, а саме: $X = (8; -6; 1; 0)^T C_1 + (-7; 5; 0; 1)^T C_2$.

Виконаємо перевірку розв'язку, для цього довільним константам дамо наступні значення: $C_1 = -2, C_2 = 3$.

Користуючись загальним розв'язком, записаним за допомогою матриць - стовпців, знайдемо значення всіх невідомих системи для вказаного випадку.

$$\begin{cases} x_1 = 8 \cdot (-2) + (-7) \cdot 3 = -37 \\ x_2 = (-6) \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 27 \\ x_3 = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 = -2 \\ x_4 = 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = 3 \end{cases}$$

Підставимо ці значення у вихідну систему

$$\begin{cases} 3\cdot(-37)+5\cdot 27+6\cdot(-2)-4\cdot 3=0 \\ -37+2\cdot 27+4\cdot(-2)-3\cdot 3=0 \\ 4\cdot(-37)+5\cdot 27-2\cdot(-2)+3\cdot 3=0 \\ 3\cdot(-37)+8\cdot 27+24\cdot(-2)-19\cdot 3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\equiv 0,\ \text{тотжність}, \\ 0\equiv 0,\ \text{тотжність}, \\ 0\equiv 0,\ \text{тотжність}, \\ 0\equiv 0,\ \text{тотжність}. \end{cases}$$

Отже, розв'язок зроблено вірно.

Практика 3. Методи розв’язування систем лінійних рівнянь

3.1. За формулами Крамера

Нехай задана система лінійних рівнянь з n невідомими. Матриця A такої системи, яка складена з коефіцієнтів при її невідомих, квадратна, порядку n, її визначник Δ (або $\det A$) називається визначником системи. Допоміжний визначник $\Delta_1, \Delta_2, ...\Delta_n$ одержують із визначника системи Δ заміною в ньому j - го стовпця стовпцем вільних членів (див. 3.7, 3.8 теорія).

Якщо $\Delta \neq 0$, то така система визначена, тобто має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулами Крамера

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, ...n$$

<u>Зауваження.</u> При застосуванні формул Крамера можливі наступні випадки:

а) якщо визначник системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$) і будь-який допоміжний визначник (достатньо одного) не дорівнює нулю ($\Delta_j \neq 0$), система несумісна, тобто не має жодного розв’язку.

б) визначник системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$) і всі допоміжні визначники теж дорівнюють нулю ($\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, …, $\Delta_n = 0$), система або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв’язків. Для однозначного висновку потрібне додаткове дослідження.

В наступних завданнях розв’язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.

<u>3.1.1. Системи двох рівнянь з двома невідомими</u>

<u>Задача 3.1.</u> $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -8 \\ 3x_1 - 4x_2 = 22 \end{cases}$

<u>Розв’язок.</u> Обчислимо визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-9=-17.$$

$\Delta\neq 0$, система визначена (має єдиний розв'язок). Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-8 & 3\\ 22 & -4\end{vmatrix}=32-66=-34;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -8\\ 3 & 22\end{vmatrix}=44+24=68.$$

Знаходимо розв'язок вихідної системи:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-34}{-17}=2;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{68}{-17}=-4.$$

Відповідь: $x_1=2;\quad x_2=-4.$

<u>Задача 3.2.</u> $\begin{cases}3x_1-4x_2=6\\ 6x_1-8x_2=9\end{cases}$

<u>Розв'язок.</u> $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 6 & -8\end{vmatrix}=-24+24=0;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}6 & -4\\ 9 & -8\end{vmatrix}=-48+36=-12.$

Маємо: $\Delta=0,\ \Delta_1\neq 0$. Цього результату достатньо, щоб зробити наступний висновок: вихідна система несумісна (не має жодного розв'язку).

Такий же висновок можна зробити з аналізу даної системи. Одна її рівність суперечить іншій, бо друга рівність одержана з першої множенням на 2 тільки її лівої частини, тобто не виконується відношення $\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}\neq\frac{6}{9}$.

<u>Задача 3.3.</u> $\begin{cases}x_1+4x_2=8\\ 3x_1+12x_2=24\end{cases}$

<u>Розв'язок.</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 12\end{vmatrix}=12-12=0;\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}8 & 4\\ 24 & 12\end{vmatrix}=96-96=0;\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 8\\ 3 & 24\end{vmatrix}=24-24=0.$$

Маємо: $\Delta = 0$, і $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Не складно побачити, що друге рівняння є слідством першого – воно одержується із першого множенням на 3. Тому виконується умова $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{8}{24}$. Отже дана система має нескінченну множину розв'язків, вона зводиться до одного рівняння, а саме: $x_1 = 8 - 4x_2$; $x_2 = C$, де C - довільна стала.

<u>Додаткові пояснення:</u> для більш суттєвого розуміння розв'язку системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими інтерпретуємо одержані результати графічно у вигляді взаємного розташування на координатної площині хОу тих прямих ліній, які визначаються лінійними рівняннями даної системи.

Для цього повторно звернемось до розв'язків попередніх систем в позначені їх невідомих відповідно координатним вісям, а саме - $x_1 = x$; $x_2 = y$.

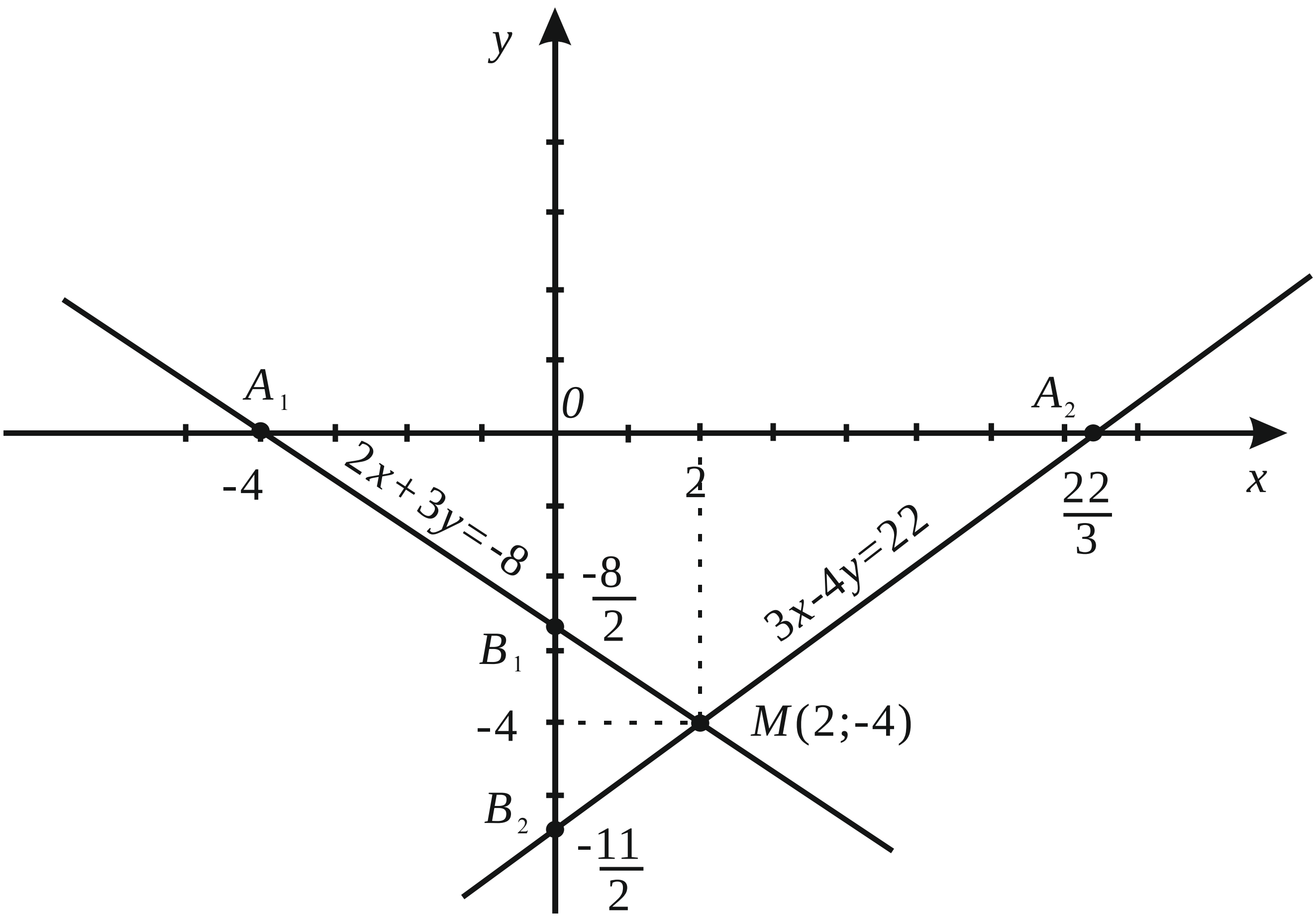


Рис. 1.

<u>Задача 3.1 (повтор)</u> $\begin{cases} 2x+3y=-8 \\ 3x-4y=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}.$

Безумовно, одержані значення змінних x і y є спільними для обох рівнянь даної системи. Відомо, що лінійне рівняння з двома змінними - рівняння прямої лінії. Отже, задані рівняння системи визначають рівняння прямих ліній, які мають спільну точку, тобто перетинаються в точці M(2; -4). Побудову цих ліній виконаємо по двом точкам, які візьмемо на координатних вісях. Для прямої $2x+3y=-8$ маємо: $y=0$; $x=-4$ і $x=0$; $y=-8/3$. Точка A_1(-4;0) і точка B_1(0;-8/3).

Для прямої $3x-4y=22$ маємо: A_2(22/3;0) і точка B_2(0;-11/2).

Взаємне розташування даних прямих ліній показано на рис. 1. Приведені прямі лінії перетинаються тільки в одній точці М, адже відповідна система рівнянь має єдиний розв'язок.

<u>Задача 3.2 (повтор)</u> $\begin{cases} 3x-4y=6 \\ 6x-8y=9 \end{cases}.$

Для прямої $3x-4y=6$: A_1(2;0) і точка B_1(0;-3/2).

Для прямої $6x-8y=9$: A_2(3/2;0) і точка B_2(0;-9/8). Взаємне розташування цих прямих ліній показано на рис. 2.

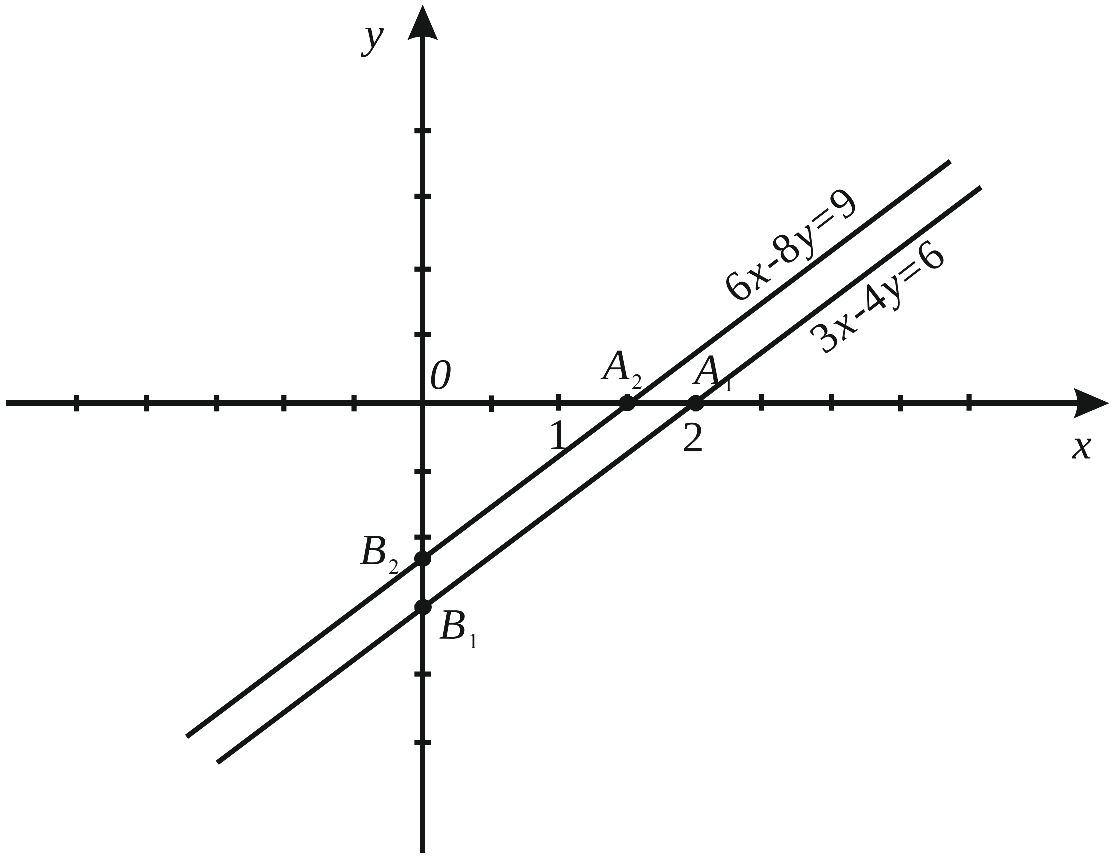


Рис. 2.

Прямі не перетинаються (паралельні), бо система рівнянь не сумісна.

<u>Задача 3.3 (повтор)</u> $\begin{cases} x+4y=8 \\ 3x+12y=24 \end{cases}$.

Система зводиться до одного рівняння $x+4y=8$, якому відповідає пряма лінія, показана на рис. 3.

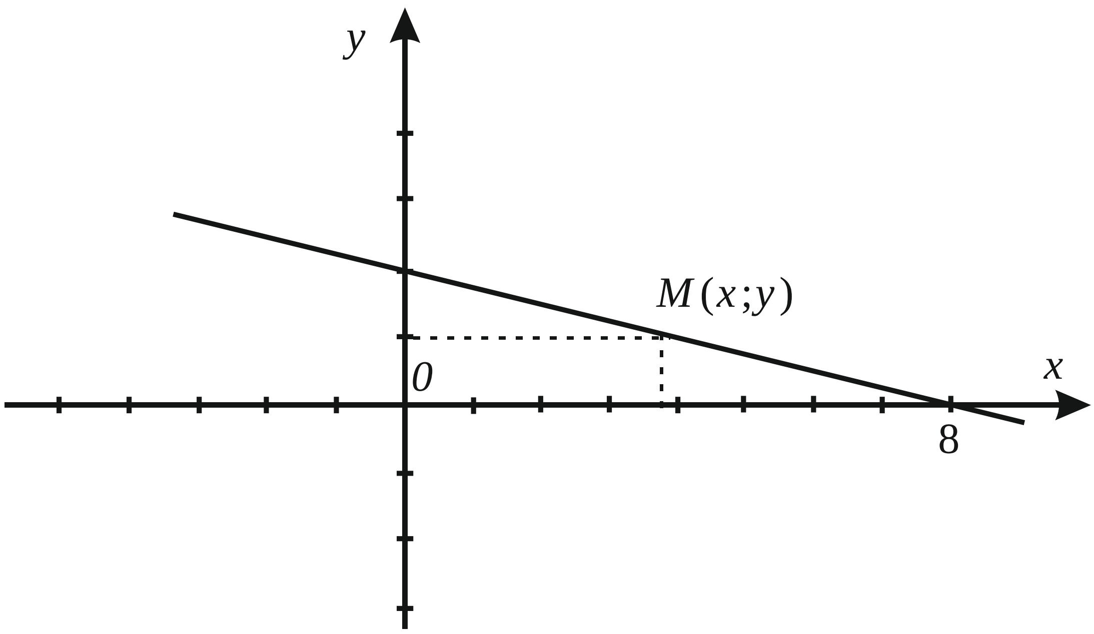


Рис. 3.

Координати будь якої точки $M(x;y)$ із множини усіх точок цієї прямої задовольняють обом рівнянням системи.

3.1.2. Системи трьох рівнянь з трьома невідомими

Задача 3.4 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$.

Розв'язок. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 1 + 48 - 20 + 8 - 9 = -2.$$

$\Delta \neq 0$, система визначена (має тільки один розв'язок).
Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ -5 & 5 & -4\\ -4 & 1 & -3\end{vmatrix}=-30-5-48+20+8+45=-10;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -5 & -4\\ 4 & -4 & -3\end{vmatrix}=-30-4-32+20-32+6=-12;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & 5 & -5\\ 4 & 1 & -4\end{vmatrix}=-40+2+60-40+10-12=-20.$$

Розв'язок системи знаходимо за формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-10}{-2}=5;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-12}{-2}=6;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-20}{-2}=10.$$

Відповідь: $x_1=5;\quad x_2=6;\quad x_3=10.$

Задача 3.5 $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=9\\ 3x_1-5x_2+x_3=-4\\ 4x_1-7x_2+x_3=5\end{cases}.$

Розв'язок. Обчислимо визначник системи:

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 1\\ 4 & -7 & 1\end{vmatrix}=-10-63-4+60+14+3=0.$ Це частинний випадок. Виконаємо обчислення допоміжних визначників

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}9 & -1 & 3\\ -4 & -5 & 1\\ 5 & -7 & 1\end{vmatrix}=-45+84-5+75+63-4=168.$$

Маємо: $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$. В цьому випадку немає потреби обчислювати Δ_2 і Δ_3, бо результат вже відомий, а саме: система несумісна (не має жодного розв'язку).

Задача 3.6 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases}$.

Розв'язок. Обчислимо визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 0$, бо є пропорційні рядки. Знову частинний випадок, але який?

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 6 \\ 12 & -6 & 9 \end{vmatrix} = -144 - 90 - 144 + 144 + 144 + 90 = 0.$$

Далі скористуємось властивостями визначників.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 12 & 9 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо: $\Delta = 0$ і $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$.

Аналізуючи систему нескладно побачити, що її друга рівність суперечіть першій, бо $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} \neq \frac{4}{5}$. Отже система несумісна (не має жодного розв'язку).

Задача 3.7 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -1 \end{cases}$.

Розв'язок. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -5 \\ 4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -81 + 20 - 20 + 24 + 75 - 18 = 0.$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -5 \\ -1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -27 + 30 + 5 - 6 + 25 - 27 = 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 81 - 4 - 20 - 24 - 15 - 18 = 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 9 + 10 + 12 + 12 - 45 + 2 = 0.$$

Маємо: $\Delta = 0$ і $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Додатково помічаємо, що третє рівняння є наслідком перших двох (від першого рівняння, помноженого на 2, віднімається друге). Тому третє рівняння нової інформації не містить і повинно бути відкинуто. Рівняння, що залишилися, розглядаємо як систему двох рівнянь з двома невідомими, наприклад, x_1 та x_2:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 - 2x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 = 3 + 5x_3 \end{cases}.$$

Розв'зуємо її за формулами Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - 2x_3 & 1 \\ 3 + 5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 6x_3 - 3 - 5x_3 = -6 + x_3;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 1-2x_3\\ 2 & 3+5x_3\end{vmatrix}=9+15x_3-2+4x_3=7+19x_3;$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-6+x_3}{-11}=\frac{6-x_3}{11};\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{7+19x_3}{-11}=-\frac{7+19x_3}{11}.$$

Величину x_3 тут можна задати довільно. Нехай $x_3=-5$, тоді:

$$x_1=\frac{6-(-5)}{11}=1;\ x_2=-\frac{7+19\cdot(-5)}{11}=8.$$

Зробимо перевірку.

$$\begin{cases}3\cdot1+8+2\cdot(-5)=1 & & 1\equiv1 & \text{тотожність}\\ 2\cdot1-3\cdot8-5\cdot(-5)=3 & \Rightarrow & 3\equiv3 & \text{тотожність}\\ 4\cdot1+5\cdot8+9\cdot(-5)=-1 & & -1\equiv-1 & \text{тотожність}\end{cases}$$

Розв’язок задовольняє системі. Отже, вихідна система невизначена (має нескінченну множину розв’язків).

Позначимо: $x_3=C$, де C - довільна константа. В цьому випадку загальний розв’язок вихідної системи має вигляд:

$$x_1=\frac{6-C}{11};\ x_2=-\frac{7+19\cdot C}{11};\ x_3=C.$$

Практична порада. При розв’язку розглядаємих систем лінійних рівнянь за допомогою формул Крамера може зустрітись така система, коли $\Delta=0$ і $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ та складно зробити висновок про її несумісність чи невизначеність, тобто про наявність в ній рівняння, залежного від двох інших рівнянь. В цьому випадку зручніше розглянути мінори другого порядку визначника Δ. Якщо серед них знайдеться мінор, що не дорівнює нулю (достатньо одного), система невизначена, вона зводиться до системи двох рівнянь з двома невідомими.

Як правило дії по створенню такої системи визначаються мінором, який прийнято до розгляду, він називається базисним мінором. Із вихідної системи вилучається те рівняння , коефіцієнти якого не ввійшли до базисного мінору, а невідома, коефіцієнти із стовпця при якій також не складають цей мінор, відноситься до вільної невідомої.

<u>Задача 3.8</u> $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -10 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 14 \\ 5x_1 - 18x_2 + 7x_3 = 62 \end{cases}$.

<u>Розв'язок.</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & -18 & 7 \end{vmatrix} = -56 + 108 + 15 - 40 + 36 - 63 = 0;$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10 & 3 & -2 \\ 14 & -4 & 1 \\ 62 & -18 & 7 \end{vmatrix} = 280 + 504 + 186 - 496 - 180 - 294 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -10 & -2 \\ 3 & 14 & 1 \\ 5 & 62 & 7 \end{vmatrix} = 196 - 372 - 50 + 140 - 124 + 210 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -10 \\ 3 & -4 & 14 \\ 5 & -18 & 62 \end{vmatrix} = -496 + 540 + 210 - 200 + 504 - 558 = 0.$$

Маємо $\Delta = 0$ і $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$.

В цій системі складно з першого погляду визначити наявність рівняння, яке представляє лінійну комбінацію інших рівнянь, тобто створено множення їх на число і додаванням.

Тому розглянемо мінори другого порядку визначника Δ. Серед них є мінори, що не дорівнюють нулю., наприклад, мінор лівого верхнього кута, а саме $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17 \neq 0.$

На підставі одержаного результату робимо наступний висновок: система невизначена (має нескінченну множину розв'язків). Знайдемо її загальний розв’язок. Для зручності представлений мінор M_2 приймаємо за базисний. До нього не ввійшли коефіцієнти третього рівняння, тому це рівняння вилучаємо із системи. Невідому x_3, коефіцієнти із стовпця при якій також не ввійшли до базисного мінору, відносимо до вільної невідомої.

В результаті маємо наступну систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -10 + 2x_3 \\ 3x_1 - 4x_2 = 14 - x_3 \end{cases}.$$

Виконаємо її розв’язок за формулами Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -10 + 2x_3 & 3 \\ 14 - x_3 & -4 \end{vmatrix} = 40 - 8x_3 - 42 + 3x_3 = -2 - 5x_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -10 + 2x_3 \\ 3 & 14 - x_3 \end{vmatrix} = 28 - 2x_3 + 30 - 6x_3 = 58 - 8x_3.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2 - 5x_3}{-17} = \frac{2 + 5x_3}{17};$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{58 - 8x_3}{-17} = \frac{8x_3 - 58}{17}.$$

Виконаємо перевірку. Нехай $x_3 = 3,$ тоді: $x_1 = \frac{2 + 5 \cdot 3}{17} = 1;$ $x_2 \frac{8 \cdot 3 - 58}{17} = -2.$ Підставимо ці значення у вихідну систему:

$$\begin{cases} 2\cdot 1+3\cdot(-2)-2\cdot 3=-10 & -10\equiv -10, \quad \text{тотожність,} \\ 3\cdot 1-4\cdot(-2)+3=14 \quad \Rightarrow & 14\equiv 14, \quad \text{тотожність,} \\ 5\cdot 1-18\cdot(-2)+7\cdot 3=62 & 62\equiv 62, \quad \text{тотожність.} \end{cases}$$

Розв'язок задовольняє системі. Позначимо $x_3=C$, де C - довільна константа, тоді загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$$x_1=\frac{2+5C}{17};\ x_2=\frac{8C-58}{17};\ x_3=C.$$

До речі, в розглянутій системі третє рівняння одержано відніманням першого її рівняння, помноженого на 2 від другого рівняння, помноженого на 3.

Зауваження 1. Розв'язок системи n рівнянь з n невідомими при $n>3$ за формулами Крамера не зовсім зручно, бо необхідно обчислювати відповідну кількість визначників n- го порядку. В цьому випадку доцільно скористуватись методом Гаусса, практичне застосування якого розглянути в 3.3.

Зауваження 2. Дослідження системи лінійних рівнянь з метою оцінки існування її розв'язку, як правило виконується за допомогою теореми Кронекера-Капеллі, практичне застосування якої розглянути в розділі 3.4 .

Зауваження 3. Розв'язок систем лінійних рівнянь загального вигляду (m рівнянь з n невідомими) розглянуто в розділі 3.5.

3.2. Матричний метод (спосіб) розв'язання систем лінійних рівнянь

Нехай задано систему n рівнянь з n невідомими. Матриця A такої системи, що складена з коефіцієнтів при її невідомих, квадратна порядку n. Якщо її визначник відрізняється від нуля ($\det A\neq 0$), то така матриця називається невиродженою і для неї існує єдина обернена матриця A^{-1}.

Матричний метод розв'язання невиродженої системи рівнянь визначається наступним співвідношенням:

$$X=A^{-1}B,$$

Де X, B - матриці-стовпці, відповідно невідомих та вільних членів.

Згадаємо, що обернена матриця до невиродженої квадратної матриці A порядку n обчислюється за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення до елементу a_{ij} матриці A, яке визначається таким чином:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

де M_{ij} - мінор до того ж самого елементу a_{ij}. До речі мінор M_{ij} утворюють з визначника $\det A$ шляхом викреслювання i - го рядка та j - го стовпця на перетину яких знаходиться елемент a_{ij}.

<u>Задача 3.9</u> Матричним методом розв'язати наступну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=16 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-2 \\ -4x_1-2x_2+5x_3=3 \end{cases}$.

<u>Розв'язок.</u> Запишемо матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=40-12-8+32-8+15=59.$$

$\det A \neq 0$, тому матриця A невироджена і для неї існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A. Маємо

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 16; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 18; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

Складемо обернену матрицю A^{-1}, а саме $A^{-1} = \dfrac{1}{59}\begin{pmatrix} 16 & 1 & -6 \\ -7 & 18 & 10 \\ 10 & 8 & 11 \end{pmatrix}$.

Знайдемо розв’язок системи рівнянь

$$X = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 16 & 1 & -6 \\ -7 & 18 & 10 \\ 10 & 8 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 256-2-18 \\ -112-36+30 \\ 160-16+33 \end{pmatrix} = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 236 \\ -118 \\ 177 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 4$; $x_2 = -2$; $x_3 = 3$.

Виконаємо перевірку розв’язку.

$$\begin{cases} 2\cdot 4-(-2)+2\cdot 3 = 16 \\ 3\cdot 4+4\cdot(-2)-2\cdot 3 = -2 \\ -4\cdot 4-2\cdot(-2)+5\cdot 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 16 = 16, & \text{тотожність} \\ -2 = -2, & \text{тотожність} \\ 3 = 3, & \text{тотожність} \end{matrix}.$$

Розв’язок задовольняє вихідній системі рівнянь.

3.3. Метод Гаусса. (метод послідовного вилучення невідомих)

Практично, при розв’язку системи лінійних рівнянь методом Гаусса записують її розширену матрицю A^*, яку отримують дописуванням до основної матриці A цієї системи, складеної з коефіцієнтів при невідомих, стовпця вільних членів.

На першому етапі розв’язку (прямий хід) за допомогою елементарних перетворень матриці A^* послідовно вилучають з матриці A коефіцієнти, що розташовані нижче головної діагоналі. При цьому квадратна матриця A, яка відповідає системі n рівнянь з n невідомими, зводиться до верхньої трикутної матриці, в якій всі елементи, розташовані під головною діагоналлю, дорівнюють нулю.

Після елементарних перетворень розширеної матриці, виходячи з нового її вигляду, записують трикутну систему рівнянь, яка еквівалентна вихідний системі.

На другому етапі (зворотний хід) послідовно в напрямку знизу у верх, визначають невідомі цієї системи.

Елементарні перетворення матриці полягають у виконанні наступних дій:

1) перестановка двох довільних рядків;

2) множення усіх елементів якого-небудь рядка на довільне число λ, що не дорівнює нулю, $\lambda \neq 0$;

3) додавання до елементів деякого рядка відповідних елементів іншого рядка, помножених на довільне число відмінне від нуля.

Важливо взяти до уваги

1. Якщо одержана верхня трикутна матриця коефіцієнтів при невідомих, то останнє рівняння трикутної системи містить тільки одне невідоме x_n, яке легко визначити, тобто вихідна система визначена (має єдиний розв’язок).

2. Якщо в розширеній матриці A^* обтулився рядок (або декілька рядків), то в еквівалентній системі кількість рівнянь k стало менше ніж невідомих ($k < n$), тому вихідна система невизначена (має нескінченну множину розв’язків). В цьому випадку записують вирази для знаходження основних k невідомих через вільні ($n-k$) невідомі, які позначають довільними константами. Як правило, за вільні приймають ті невідомі, коефіцієнти при яких не ввійшли до базисного мінору, тобто до розглянутого мінору вищого порядку не рівному нулю.

3. Якщо обнулився будь-який рядок тільки в основній матриці A (в еквівалентній системі появилась неможлива рівність типу $0 = b_n'$, де $b_n' \neq 0$), система несумісна (не має жодного розв'язку).

Методом Гаусса розв'язати наступні системи лінійних рівнянь:

Задача 3.10 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -10 \\ -4x_1 + x_2 - 6x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 17 \end{cases}$.

Розв'язок. Складемо розширену матрицю і виконаємо необхідні елементарні перетворення

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -10 \\ -4 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 4 \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left\{ \begin{array}{c} \text{перший рядок помножимо} \\ \text{на 4 і (-2) та додамо} \\ \text{відповідно до 2-го і 3-го рядків} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -7 & 6 & -33 \\ 0 & 7 & -8 & 37 \end{array}\right) \sim \left\{ \begin{array}{c} \text{другий рядок додамо} \\ \text{до 3-го рядка} \\ \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -7 & 6 & -33 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) :(-2) \sim \left\{ \begin{array}{c} \text{третий рядок} \\ \text{поділемо на (-2)} \\ \end{array} \right\} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & -7 & 6 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Одержали верхню трикутну матрицю коефіцієнтів при невідомих. Відповідно кінцевому вигляді матриці A^* запишемо еквівалентну систему рівнянь трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -10 \\ \quad -7x_2 + 6x_3 = -33 \\ \qquad\qquad x_3 = -2 \end{cases}$$

Кількість рівнянь співпадає з кількістю невідомих, отже система визначена (має тільки один розв'язок).
На цьому прямий хід розв'язку закінчено. Виконаємо зворотний хід, тобто розв'яжемо кожну рівність цієї системи в напрямку знизу уверх.

$$\begin{cases} x_3 = -2 \\ -7x_2 + 6\cdot(-2) = -33 \;\Rightarrow\; x_2 = \dfrac{1}{7}(33-12) = 3; \\ x_1 - 2\cdot 3 + 3\cdot(-2) = -10 \;\Rightarrow\; x_1 = -10+6+6 = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = -2$.

<u>Зауваження.</u> Маючи бажання, дану систему рівнянь можна розв'язати за формулами Крамера або матричним способом.

<u>Задача 3.11</u> $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -15 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = -16 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$.

<u>Розв'язок.</u> Запишемо розширену матрицю і виконаємо необхідні елементарні перетворення

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -2 & 9 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & -15 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & -16 \\ -2 & -4 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-4) \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок помножемо} \\ \text{на (-2); (-4); 2 та додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го} \\ \text{і 4-го рядків} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -8 & 5 & -33 \\ 0 & 1 & -7 & 12 & -52 \\ 0 & -2 & 7 & -2 & 24 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot 2 \end{matrix} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{другий рядок помножемо} \\ \text{на (-1); 2 та додамо} \\ \text{відповідно до 3-го і} \\ \text{4-го рядків} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -8 & 5 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -19 \\ 0 & 0 & -9 & 8 & -42 \end{array}\right) \cdot 9 \quad \sim\left\{\begin{array}{l} \text{третий рядок помножемо} \\ \text{на 9 та додамо} \\ \text{відповідно до 4-го рядка} \end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & -8 & 5 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 71 & -213 \end{array}\right)$$

Одержали верхню трикутну матрицю коефіцієнтів при невідомих, отже вихідна система має єдиний розв'язок. Кінцевому запису матриці A^* відповідає наступна еквівалентна система рівнянь трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 9 \\ \quad x_2 - 8x_3 + 5x_4 = -33 \\ \qquad x_3 + 7x_4 = -19 \\ \qquad\quad 71x_4 = -213 \end{cases}.$$

Розв'язок рівностей цієї системи виконаємо в напрямку знизу уверх:

$$\begin{cases} x_4 = -\dfrac{213}{71} = -3 \\ x_3 + 7\cdot(-3) = -19 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -19 + 21 = 2 \\ x_2 - 8\cdot 2 + 5\cdot(-3) = -33 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -33 + 16 + 15 = -2 \\ x_1 + (-2) + 2\cdot 2 - 2\cdot(-3) = 9 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 9 + 2 - 4 - 6 = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2;\ x_4 = -3.$

Зауваження. Одержувати нулі в стовпці матриці A зручно, якщо множником є одиниця. При її відсутності бажано виконати відповідні елементарні перетворення матриці A^*, щоб одержати вказану умову. Такий випадок розглянемо при розв'язку наступної системи рівнянь.

<u>Задача 3.12</u> $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 23 \\ -6x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 10 \end{cases}.$

<u>Розв'язок.</u>

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 3 & 4 & 14 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & -15 \\ 3 & 1 & 4 & -2 & 23 \\ -6 & 2 & 5 & -4 & 10 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок віднімемо} \\ \text{від 3-го, який вилочимо з} \\ \text{подальшого розгляду} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -2 & 3 & 4 & 14 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 14 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & -15 \\ -6 & 2 & 5 & -4 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-4) \\ \cdot 6 \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок помножемо} \\ \text{на (-2), (-4), 6 та додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го} \\ \text{та 4-го рядків} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & -8 & 1 & 16 & -4 \\ 0 & -9 & -6 & 27 & -51 \\ 0 & 20 & 11 & -40 & 64 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{від другого рядка віднімемо} \\ \text{третій рядок, який потім} \\ \text{вилочимо} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -11 & 47 \\ 0 & -8 & 1 & 16 & -4 \\ 0 & 20 & 11 & -40 & 64 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 8 \\ \cdot(-20) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{другий рядок помножемо} \\ \text{на 8 і на (-20) та додамо} \\ \text{відповідно до 3-го і 4-го} \\ \text{рядків} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -11 & 47 \\ 0 & -8 & 1 & 16 & -4 \\ 0 & 20 & 11 & -40 & 64 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 8 \\ \cdot(-20) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{другий рядок помножемо} \\ \text{на 8 і на (-20) та додамо} \\ \text{відповідно до 3-го і 4-го} \\ \text{рядків} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -11 & 47 \\ 0 & 0 & 57 & -72 & 372 \\ 0 & 0 & -129 & 180 & -876 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \\ :3 \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l}\text{третій і четвертий рядки} \\ \text{поділимо на 3}\end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -11 & 47 \\ 0 & 0 & 19 & -24 & 124 \\ 0 & 0 & -43 & 60 & -292 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ \cdot 43 \\ \cdot 19 \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l}\text{третій рядок помножемо на 43,} \\ \text{четвертий рядок - на 19} \\ \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -11 & 47 \\ 0 & 0 & 817 & -1032 & 5332 \\ 0 & 0 & -817 & 1140 & -5548 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l}\text{третій рядок додамо} \\ \text{до четвертого} \\ \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -11 & 47 \\ 0 & 0 & 817 & -1032 & 5332 \\ 0 & 0 & 0 & 108 & -216 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ :43 \\ :108 \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l}\text{третій рядок поділимо на 43} \\ \text{а четвертий рядок - на 108} \\ \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 3 & 1 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -11 & 47 \\ 0 & 0 & 19 & -24 & 124 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Одержали верхню трикутну матрицю коефіцієнтів при невідомих. Відповідно кінцевому вигляду матриці A^* запишемо еквівалентну систему рівнянь трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4 = 9 \\ \qquad x_2 + 7x_3 - 11x_4 = 47 \\ \qquad\qquad 19x_3 - 24x_4 = 124 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = -2 \end{cases}.$$

Система визначена. Зробимо розв'язок рівностей цієї системи в напрямку знизу уверх (зворотний хід розв'язку).

$$\begin{cases} x_4 = -2 \\ 19x_3 - 24\cdot(-2) = 124 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \dfrac{1}{19}(124 - 48) = 4 \\ x_2 + 7\cdot 4 - 11\cdot(-2) = 47 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 47 - 28 - 22 = -3 \\ x_1 + 3\cdot(-3) + 4 - 6\cdot(-2) = 9 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 9 + 9 - 4 - 12 = 2 \end{cases}.$$

Відповідь: $x_1 = 2;\ x_2 = -3;\ x_3 = 4;\ x_4 = -2.$

Зробимо перевірку, для цього одержані значення невідомих підставимо у вихідну систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2\cdot 2 - 2\cdot(-3) + 3\cdot 4 + 4\cdot(-2) = 14, \quad \Rightarrow 14 \equiv 14, \quad \text{тотожність}, \\ 4\cdot 2 + 3\cdot(-3) - 2\cdot 4 + 3\cdot(-2) = -15, \quad \Rightarrow -15 \equiv -15, \quad \text{тотожність}, \\ 3\cdot 2 + (-3) + 4\cdot 4 - 2\cdot(-2) = 23, \quad \Rightarrow 23 \equiv 23, \quad \text{тотожність}, \\ -6\cdot 2 + 2\cdot(-3) + 5\cdot 4 - 4\cdot(-2) = 10, \quad \Rightarrow 10 \equiv 10, \quad \text{тотожність}. \end{cases}$$

Розв'язок зроблено вірно.

<u>Задача 3.13</u> $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 9x_2 - 7x_3 = -2 \end{cases}.$

<u>Розв'язок.</u>

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & -7 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-5) \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix} \text{перший рядок помножемо на} \\ \text{(-3) і (-5) та додамо відповідно} \\ \text{до 2-го і 3-го рядків} \end{matrix}\right\}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -16 & -11 \\ 0 & 14 & -32 & -22 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix} \text{другий рядок помножемо на} \\ \text{(-2) та додамо до 3-го рядка} \end{matrix}\right\}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -16 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{matrix} \text{вилучимо третий рядок,} \\ \text{що обнулився} \end{matrix}\right\} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -16 & -11 \end{array}\right).$$

Відповідно до цього вигляду матриці A^* запишемо еквівалентну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ \quad 7x_2 - 16x_3 = -11 \end{cases}$$

В цій системі кількість рівнянь менше кількості невідомих, тому вихідна система невизначена (має нескінченну множину розв'язків). Розв'язок одержаних рівностей виконаємо в напрямку знизу уверх, відносячи x_3 до вільної невідомої.

$$7x_2 - 16x_3 = -11 \Rightarrow 7x_2 = -11 + 16x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{7}(16x_3 - 11),$$

$$x_1 - \frac{1}{7}(16x_3 - 11) + 5x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = 4 + \frac{1}{7}(16x_3 - 11) - 5x_3 = \frac{1}{7}(17 - 19x_3).$$

Позначимо $x_3 = C$, де C - довільна стала, тоді загальний розв'язок вихідної системи має наступний вигляд:

$$x_1 = \frac{1}{7}(17 - 19C),$$

$$x_2 = \frac{1}{7}(16C - 11),$$

$$x_3 = C.$$

Зробимо перевірку. Нехай $C = 2$, тоді

$x_1 = \frac{1}{7}(17 - 19 \cdot 2) = -3;$ $x_2 = \frac{1}{7}(16 \cdot 2 - 11) = 3;$ $x_3 = 2$. Ці значення підставимо у вихідну систему:

$$\begin{cases} -3 - 3 + 5 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 \equiv 4, \quad \text{тотжність} \\ 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \equiv 1, \quad \text{тотжність} \\ 5 \cdot (-3) + 9 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad -2 \equiv -2, \quad \text{тотжність.} \end{cases}$$

Розв'язок зроблено вірно.

Задача 3.14 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10 \end{cases}$.

Розв'язок.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{перший рядок помножемо на} \\ \text{(-2), (-3), (-1) та додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го,} \\ \text{4-го рядків} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{другий рядок помножемо} \\ \text{на (-2), (-3) та додамо} \\ \text{відповідно до 3-го, 4-го} \\ \text{рядків} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{вилучимо третій та четвертий} \\ \text{рядки, які обнулились} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Вихідна система має нескінченну множину розв'язків. Відповідно кінцевому вигляді матриці A^* запишемо еквівалентну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

За базисний, що не дорівнює нулю, приймемо наступний мінор другого порядку (найвищого в даному випадку):

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Він складений з коефіцієнтів при x_1, x_3, тому ці невідомі базові, а x_2, x_4 - вільні. Розв'язок виконуємо в напрямку знизу уверх.

$$x_3 = 3 + 5x_4,$$

$$2x_1 - x_2 - (3 + 5x_4) + 3x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_2 + x_4.$$

Позначимо $x_2 = C_1, x_4 = C_2$ і запишемо загальний розв'язок вихідної системи:

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2}C_1 + C_2, \quad x_2 = C_1, \quad x_3 = 3 + 5C_2, \quad x_4 = C_2.$$

Надамо довільним константам конкретні значення $C_1 = 2, C_2 = -1$ та знайдемо частковий розв'язок:

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3 + 5 \cdot (-1) = -2, \quad x_4 = -1.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 2 - (-2) + 3 \cdot (-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1, \quad \text{тотожність,} \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - (-2) + (-1) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 5, \quad \text{тотожність,} \\ 6 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - (-2) - (-1) = 9 \quad \Rightarrow \quad 9 = 9, \quad \text{тотожність,} \\ 2 \cdot 2 - 2 + 2 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 10 \quad \Rightarrow \quad 10 = 10, \quad \text{тотожність.} \end{cases}$$

Розв’язок зроблено вірно.

<u>Задача 3.15</u> $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = 8 \\ 7x_1 + 9x_2 + x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}.$

<u>Розв’язок.</u>

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & -1 & 8 \\ 7 & 9 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{поміняємо місцями} \\ \text{перший і третий рядки} \end{array}\right\} \sim$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 8 & -1 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-7) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок помножемо} \\ \text{на (-3), (-2), (-7) та додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го, 4-го} \\ \text{рядків} \end{array}\right\} \sim$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 8 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & -22 & 6 & -26 \\ 0 & -1 & -11 & 3 & -13 \\ 0 & -5 & -55 & 15 & -56 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-2) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{друге рівняння} \\ \text{поділимо на (-2)} \end{array} \right\} \sim$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 8 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & -11 & 3 & -13 \\ 0 & -1 & -11 & 3 & -13 \\ 0 & -5 & -55 & 15 & -56 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ \cdot 5 \end{array} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{до третього рядка додамо} \\ \text{другий, а до 4-го рядка додамо} \\ \text{другий, помножений на 5} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 8 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 11 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 8 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 11 & -3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

Ми одержали неможливу рівність 0 = 9, отже система несумісна (не має жодного розв’язку).

3.4. Теорема Кронекера-Капеллі (або необхідна і достатня умова сумісності системи лінійних рівнянь)

Для того щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, аби ранг основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці, тобто $r(A) = r(A^*)$. При цьому, якщо $r(A) = n$, де n - число невідомих системи, то дана система визначена (має тільки один розв’язок), якщо $r(A) < n$ - система невизначена (має нескінченну множину розв’язків). Зрозуміло, якщо не виконується умова розглянутої теореми, то система несумісна (не має жодного розв’язку). Згадаємо, що ранг матриці – це найвищий порядок відмінного від нуля її мінору.

У наступних прикладах дослідити систему на сумісність. У випадку сумісності розв’язати її.

Задача 3.16 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}.$

Розв'язок. Знайдемо ранг основної і розширеної матриць.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 & 6 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{від 3-го рядка віднімемо} \\ \text{2-й, який далі вилучимо з} \\ \text{розгляду} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-4) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок помножемо} \\ \text{на (-2), (-4) та додамо} \\ \text{відповідно до 2-го і 3-го рядка} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 11 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{другий рядок помножемо на} \\ \text{(-2) та додамо до 3-го рядка} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Матриці A і A^* мають мінори не вище третього порядку (три рядки). Для матриці A:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, \; M_3 \neq 0, \text{ отже } r(A) = 3.$$

Для матриці A^* зручніше визначити наступний мінор:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9,\ M_3 \neq 0,\ \text{отже } r(A^*) = 3.$$

$r(A) = r(A^*) = 3 = n$.

Система сумісна, має тільки один розв'язок, тобто визначена. Розв'яжемо її методом Гаусса. Для цього запишемо еквівалентну систему рівнянь відповідно до останнього вигляду матриці A^*.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ \quad -3x_2 + 5x_3 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases}.$$

Звідки:

$x_3 = 3; \quad -3x_2 + 5\cdot 3 = 0, \quad \Rightarrow x_2 = 5;$

$x_1 + 5 - 2\cdot 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2.$

Відповідь: $x_1 = 2; \quad x_2 = 5; \quad x_3 = 3$.

Задача 3.17 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 16 \end{cases}$.

Розв'язок.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -7 & 12 \\ 3 & -5 & 7 & -1 & 0 \\ 5 & -7 & 1 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 3 & -5 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-5) \\ \cdot(-7) \end{array} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{перший рядок помножемо} \\ \text{на (-3), (-5), (-7) та додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го,} \\ \text{4-го рядків} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -3 & 5 & -7 & 12\\ 0 & 4 & -8 & 20 & -36\\ 0 & 8 & -24 & 32 & -56\\ 0 & 20 & -32 & 44 & -68\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ :4\\ :8\\ :4\end{array}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{другий, третій та четвертий}\\ \text{рядки поділемо відповідно}\\ \text{на 4, 8, 4}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -3 & 5 & -7 & 12\\ 0 & 1 & -2 & 5 & -9\\ 0 & 1 & -3 & 4 & -7\\ 0 & 5 & -8 & 11 & -17\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot(-1)\\ \cdot(-5)\end{array}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{другий рядок помножемо}\\ \text{на (-1), (-5) та додамо до}\\ \text{3-го, 4-го рядків}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -3 & 5 & -7 & 12\\ 0 & 1 & -2 & 5 & -9\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -14 & 28\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ \cdot 2\end{array}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{третій рядок помножемо}\\ \text{на 2 та додамо до 4-го}\\ \text{рядка}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c}1 & -3 & 5 & -7 & 12\\ 0 & 1 & -2 & 5 & -9\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -16 & 32\end{array}\right).$$

Матриці A і A^* мають мінори не вище четвертого порядку (чотири рядки). Для матриці A:

$$M_4=\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -7\\ 0 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -16\end{pmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{розкладемо його за}\\ \text{елементами 1-го}\\ \text{стовпця}\end{array}\right\}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -2 & 5\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -16\end{vmatrix}=16;$$

$M_4 \neq 0; \quad r(A) = 4.$

Для матриці A^* зручніше розглянути наступний мінор:

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 12 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 32 \end{vmatrix} = -32.$$

$M_4 \neq 0; \quad r(A^*) = 4.$

$r(A) = r(A^*) = n = 4.$

Система визначена, її розв'язок виконаємо за допомогою метода Гаусса. Відповідно останньому вигляду матриці A^* запишемо еквівалентну систему трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ \qquad x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -9 \\ \qquad\qquad -x_3 - x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\quad -16x_4 = 32 \end{cases}$$

Розв'яжемо ці рівності в зворотному напрямку.

$x_4 = \dfrac{32}{-16} = -2;$

$-x_3 - (-2) = 2 \Rightarrow x_3 = 0;$

$x_2 - 2 \cdot 0 + 5 \cdot (-2) = -9 \Rightarrow x_2 = 1;$

$x_1 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0 - 7 \cdot (-2) = 12 \Rightarrow x_1 = 1.$

Відповідь: $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 0; x_4 = -2$.

Зауваження. При розв'язку попередніх системи (Задачі 3.16, 3.17) одержані верхні трикутні матриці A коефіцієнтів при їх невідомих.

Відповідно цьому в кожній еквівалентній системі співпадає кількість рівнянь і кількість невідомих, що також є ознакою визначеності системи.

Задача 3.18 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 \quad + \quad x_3 - 7x_4 = 3 \\ \quad 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$.

Розв'язок.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l}\text{другий рядок додамо відповідно} \\ \text{до 3-го і 4-го рядка}\end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l}\text{другий рядок додамо відповідно} \\ \text{до 3-го і 4-го рядка}\end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l}\text{вилучимо з розгляду} \\ \text{3-й і 4-й рядки, які} \\ \text{обнулились}\end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Матриці A і A^* мають мінори не вище другого порядку (два рядки).

Для матриці A: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4,\ M_2 \neq 0$, отже $r(A) = 2$;

Для матриці A^*: $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,\ M_2 \neq 0$, отже $r(A^*) = 2$.

Маємо $r(A)=r(A^*)=2<n=4.$ Вихідна система невизначена (має нескінченну множину розв'язків). Запишемо еквівалентну систему рівнянь відповідно кінцевому вигляді матриці A^*.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2 \\ \quad -2x_2+3\,x_3-x_4=-1 \end{cases}.$$

Розв'яжемо її методам Гаусса. За базисний приймаємо мінор, складений з коефіцієнтів при x_1 і x_2, тому ці невідомі віднесемо до базисних, а x_3 і x_4 - до вільних невідомих. Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=2+x_3+3x_4 \\ \quad -2x_2=-1-3\,x_3+x_4 \end{cases}$$

Розв'язок виконуємо в зворотному напрямку.

$$-2x_2=-1-3\,x_3+x_4 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{1}{2}(1+3\,x_3-x_4);$$

$$2x_1+\frac{1}{2}(1+3\,x_3-x_4)=2+x_3+3x_4 \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{1}{4}(3-x_3+7x_4).$$

Позначимо $x_3=C_1, \quad x_4=C_2$. Загальний розв'язок вихідної системи:

$$x_1=\frac{1}{4}(3-C_1+7C_2); \quad x_2=\frac{1}{2}(1+3\,C_1-C_2); \quad x_3=C_1; \quad x_4=C_2.$$

Надамо довільним константам наступні значення: $C_1=2, \quad C_2=1$, тоді $x_1=\frac{1}{4}(3-2+7\cdot 1)=2; \quad x_2=\frac{1}{2}(1+3\cdot 2-1)=3.$ Частинний розв'язок даної системи: $x_1=2; \quad x_2=3; \quad x_3=2; \quad x_4=1.$

Перевірка. Підставимо ці значення невідомих у вихідну систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\cdot 2+3-2-3\cdot 1=2 \Rightarrow 2=2, & \text{тотжність,} \\ 4\cdot 2 \quad + \quad 2-7\cdot 1=3 \Rightarrow 3=3, & \text{тотжність,} \\ \quad 2\cdot 3-3\cdot 2+1=1 \Rightarrow 1=1, & \text{тотжність,} \\ 2\cdot 2+3\cdot 3-4\cdot 2-2\cdot 1=3 \Rightarrow 3=3, & \text{тотжність.} \end{cases}$$

Розв'язок зроблено вірно.

<u>Задача 3.19</u>
$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=12 \\ -2x_1+5x_2+2x_3-x_4=9 \\ 3x_1-4x_2+x_3+2x_4=-10 \\ 5x_1-9x_2-x_3+3x_4=2 \end{cases}.$$

<u>Розв'язок.</u>

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 12 \\ -2 & 5 & 2 & -1 & 9 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & -10 \\ 5 & -9 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-5) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l}\text{перший рядок помножений} \\ \text{на 2, (-3), (-5) додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го і} \\ \text{4-го рядків}\end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 12 \\ -2 & 5 & 2 & -1 & 9 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & -10 \\ 5 & -9 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-5) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l}\text{перший рядок помножений} \\ \text{на 2, (-3), (-5) додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го і} \\ \text{4-го рядків}\end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & 8 & -9 & 33 \\ 0 & 0 & -24 & 32 & -112 \\ 0 & 0 & -24 & 32 & -91 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l}\text{третій рядок помножений} \\ \text{на (-1) додамо до 4-го} \\ \text{рядка}\end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -2 & 3 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & 8 & -9 & 33 \\ 0 & 0 & -24 & 32 & -112 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ :8 \\ \\ \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l}\text{поділимо третій} \\ \text{рядок на 8}\end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 12\\0 & 1 & 8 & -9 & 33\\0 & 0 & -3 & 4 & -14\\0 & 0 & 0 & 0 & 21\end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю A. Вона містить три ненульових рядків, тому найвищий порядок її мінору дорівнює трьом. Обчислимо найбільш зручний із всіх можливих:

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 8\\0 & 0 & -3\end{vmatrix}=-3.\ M_3\neq 0,\text{ тому } r(A)=3.$$

Для матриці A^* найвищий порядок мінору дорівнює чотирьом. Зручніше обчислити наступний мінор:

$$M_4=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3 & 12\\0 & 1 & 8 & 33\\0 & 0 & -3 & -14\\0 & 0 & 0 & 21\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{розкладемо його}\\\text{за елементами}\\\text{першого стовпця}\end{matrix}\right\}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 8 & 33\\0 & -3 & -14\\0 & 0 & 21\end{vmatrix}=-63$$

$M_4\neq 0$, тому $r(A^*)=4$. Одержали, що $r(A)\neq r(A^*)$, отже вихідна система несумісна (не має жодного розв’язку).

<u>Зауваження.</u> Висновок про несумісність даної системи рівнянь можна було зробити на основі вигляду перетвореної матриці A^*, останній рядок якої відповідає неможливій рівності: $0=21$.

3.5. Розв’язок системи лінійних рівнянь загального вигляду

Один з методів розв’язку системи m лінійних рівнянь з n невідомими полягає в наступному:

1. Виконують дослідження даної системи на сумісність. Для цього знаходять ранг основної матриці A та розширеної матриці A^*, відповідно

$r(A),\ r(A^*)$. Нехай $r(A)=r(A^*)=r$. За теоремою Кронекера-Капеллі система визначена (має тільки один розв'язок), якщо $r=n$; система невизначена (має нескінченну множину розв'язків), якщо $r<n$. Тобто в обох випадках система сумісна.

Нагадаємо, що ранг матриці – це найвищий порядок її мінору, який не дорівнює нулю.

2. При умові, що система сумісна, визначають базисний мінор матриці A.

Згадаємо, що базисний мінор матриці – це будь-який відмінний від нуля її мінор, порядок якого дорівнює рангові даної матриці.

Зручніше за базовий мінор основної матриці приймати той що знаходиться у лівому верхньому куті цієї матриці. При необхідності таке розташування базисного мінору можна одержати переставленням в системі відповідних рівнянь і невідомих.

3. Вилучають із системи кожне рівняння, коефіцієнти якого не ввійшли до базисного мінору, а невідомі, коефіцієнти при яких також не ввійшли до базисного мінору, приймають за вільні невідомі та позначають їх довільними сталими величинами. В наслідок одержують еквівалентну систему r рівнянь з r невідомими ($r<n$).

4. Розв'язок такої системи рівнянь знаходять одним з методів, розглянутим в 3.1, 3.2, 3.3.

<u>Зауваження.</u> Система n лінійних рівнянь з n невідомими, якщо вона невизначена також зводиться до еквівалентної системи r рівнянь з r невідомими (див. задачі 3.3, 3.7, 3.8, 3.13, 3.14, 3.18).

Розв'язати наступні системи лінійних рівнянь:

<u>Задача 3.20</u>
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}.$$

<u>Розв'язок.</u> Знаходимо ранг основної та ранг розширеної матриці, відповідно $r(A),\ r(A^*)$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок, помножений} \\ \text{на (-3), (-3), (-2), додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го та} \\ \text{4-го рядків} \end{array}\right\}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{другий рядок, додамо до} \\ \text{3-го рядка, та помножений} \\ \text{на (-1) додамо 4-го рядка} \end{array}\right\}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{другий рядок поділимо} \\ \text{на (-1) та вилучимо 3-й} \\ \text{рядок, що обнулився} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Мінори матриць A і A^* не вище третього порядку (три рядки).
Для матриці A:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1;\ M_3 \neq 0, \text{ отже } r(A) = 3.$$

Для матриці A^*:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 3 - 6 = 1;\ M_3 \neq 0, \text{ отже } r(A^*) = 3.$$

$$r(A) = r(A^*) = 3 < n = 5.$$

Вихідна система невизначена.

За базисний мінор матриці A приймаємо розглянутий мінор M_3, який складено з коефіцієнтів 1-го, 2-го і 4-го рядків, та 3-го, 4-го і 5-го стовпців. До нього не ввійшли коефіцієнти 3-го рядка, тому третє рівняння вилучаємо з еквівалентної системи. Невідомі $x_3,\ x_4,\ x_5$, коефіцієнти яких складають базисний мінор, відносимо до базисних невідомих, тоді $x_1,\ x_2$ є вільними невідомими. Позначимо їх довільними константами, а саме $x_1 = C_1,\ x_2 = C_2$.

На цій підставі дану систему зведемо до наступної системи трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 - 2C_1 + C_2 \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3 \\ -x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи виконаємо методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_4 = -3 \\ x_3 + 2\cdot(-3) + 4x_5 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 + 4x_5 = 9 \\ x_3 + 2\cdot(-3) + 3x_5 = 2 - 2C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad x_3 + 3x_5 = 8 - 2C_1 + C_2. \end{cases}$$

Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} x_3 + 4x_5 = 9 \\ x_3 + 3x_5 = 8 - 2C_1 + C_2. \end{cases}$$

Розв'яжемо її за формулами Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 8 - 2C_1 + C_2 & 3 \end{vmatrix} = -5 + 8C_1 - 4C_2;$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 8-2C_1+C_2 \end{vmatrix} = -1-2C_1+C_2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5+8C_1-4C_2}{-1} = 5-8C_1+4C_2;$$

$$x_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = \frac{-1-2C_1+C_2}{-1} = 1+2C_1-C_2.$$

Загальний розв'язок вихідної системи:

$x_1 = C_1; \quad x_2 = C_2; \quad x_3 = 5-8C_1+4C_2; \quad x_4 = -3; \quad x_5 = 1+2C_1-C_2.$

Нехай $C_1 = 2, \quad C_2 = -1,$ тоді:

$x_3 = 5-16-4 = -15; \quad x_5 = 1+4+1 = 6.$

Частинний розв'язок даної системи $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = -15; x_4 = -3; x_5 = 6.$

Перевірка.

$$\begin{cases} 2\cdot 2-(-1)+(-15)+2\cdot(-3)+3\cdot 6 = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2, \quad \text{тотожність}, \\ 6\cdot 2-3\cdot(-1)+2\cdot(-15)+4\cdot(-3)+5\cdot 6 = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = 3, \quad \text{тотожність}, \\ 6\cdot 2-3\cdot(-1)+4\cdot(-15)+8\cdot(-3)+13\cdot 6 = 9 \quad \Rightarrow \quad 9 = 9, \quad \text{тотожність}, \\ 4\cdot 2-2\cdot(-1)-15-3+2\cdot 6 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 4, \quad \text{тотожність}. \end{cases}$$

Розв'язок зроблено вірно.

Зауваження. Систему лінійних рівнянь загального виду можна розв'язати методом Гаусса, при цьому висновок про її сумісність дозволяє зробити результат перетворень над рядками розширеної матриці (див. 3.3). Ці перетворення виконуються при прямому ході метода Гаусса.

Задача 3.21 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 3 \\ 6x_1 + 2x_2 + 15x_3 = -12 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -15 \end{cases}.$

Розв'язок.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 10 & 3 \\ 6 & 2 & 15 & -12 \\ 2 & -3 & 5 & -15 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot(-4) \\ \cdot(-6) \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{перший рядок, помножений} \\ \text{на (-4), (-6), (-2), додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го, 4-го} \\ \text{рядків}\end{matrix}\right\}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 13 & 22 & -5 \\ 0 & 14 & 33 & -24 \\ 0 & 1 & 11 & -19 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{matrix}\text{переставимо другий} \\ \text{і четвертий рядки}\end{matrix}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & -19 \\ 0 & 14 & 33 & -24 \\ 0 & 13 & 22 & -5 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \cdot(-14) \\ \cdot(-13) \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{другий рядок, помножений} \\ \text{на (-14), (-13) додамо} \\ \text{відповідно до 3-го і 4-го рядків}\end{matrix}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & -19 \\ 0 & 0 & -121 & 242 \\ 0 & 0 & -121 & 242 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{третій рядок, помножений} \\ \text{на (-1) додамо до 4-го рядка}\end{matrix}\right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & -19 \\ 0 & 0 & -121 & 242 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ :(-121) \\ \\ \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{вилучимо 4-й рядок, що} \\ \text{обнулився, а 3-й рядок} \\ \text{поділимо на (-121)}\end{matrix}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 11 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Одержали верхню трикутну матрицю A, а це свідчить про те, що система визначена. (нескладно бачити, що $r(A)=r(A^*)=n=3$). Відповідно цій матриці A^* запишемо еквівалентну систему трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=2 \\ \qquad x_2+11x_3=-19 \\ \qquad\qquad x_3=-2 \end{cases}$$

Рядок, вилучений з матриці A^*, є лінійною комбінацією інших її рядків. У термінах системи це ознака того, що кожен розв'язок розглядаємих рівнянь системи є розв'язком вилученого рівняння. Виконаємо зворотний хід метода Гаусса: $\begin{cases} x_3=-2 \\ x_2+11\cdot(-2)=-19 \quad\Rightarrow\quad x_2=3 \\ x_1-2\cdot 3-3\cdot(-2)=2 \quad\Rightarrow\quad x_1=2. \end{cases}$

Відповідь. $x_1=2;\quad x_2=3;\quad x_3=-2.$

Перевірка, яку нескладно виконати, свідчить про те, що розв'язок відповідає вихідний системі рівнянь.

Задача 3.22 $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=4 \\ 9x_1+4x_2-4x_3+3x_4=2 \\ 6x_1+6x_2-9x_3-x_4=-2 \end{cases}.$

Розв'язок.

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & -4 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & -9 & -1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-3) \\ \quad\cdot(-2) \end{array} \sim \left\{\begin{array}{l} \text{перший рядок, помножений} \\ \text{на (-3), (-2) додамо відповідно} \\ \text{до 2-го, 3-го рядків} \end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 10 & -19 & -9 & -10 \\ 0 & 10 & -19 & -9 & -10 \end{array}\right)\cdot(-1) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{другий рядок, помножений} \\ \text{на (-1)додамо до 3-го рядка} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 10 & -19 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left\{\begin{array}{l} \text{вилучимо третій рядок,} \\ \text{що обнулився} \end{array}\right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc:c} 3 & -2 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 10 & -19 & -9 & -10 \end{array}\right).$$

Одержали трапецієподібну матрицю коефіцієнтів при невідомих, а це є ознакою того, що вихідна система невизначена (або $r(A) = r(A^*) = 2 < n = 4$). Відповідно даній матриці A^* запишемо еквівалентну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 4 \\ \qquad 10x_2 - 19x_3 - 9x_4 = -10. \end{cases}$$

Як бачимо, порядок базисного мінору матриці A дорівнює двом. Для зручності мінор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 30 \neq 0$ приймаємо за базисний мінор. Він складений коефіцієнтами при $x_1,\ x_2$, тому ці невідомі відносимо до базисних, а $x_3,\ x_4$ - до вільних невідомих, які позначимо довільними константами, а саме $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$. В наслідок цього еквівалентну систему рівнянь зведем до системи двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4 - 5C_1 - 4C_2 \\ \qquad 10x_2 = -10 + 19C_1 + 9C_2 \end{cases}$$

Виконаємо зворотний хід розв'язку

$$10x_2 = -10 + 19C_1 + 9C_2, \ \Rightarrow \ x_2 = \frac{1}{10}(19C_1 + 9C_2 - 10),$$

$$3x_1 - 2 \cdot \frac{1}{10}(19C_1 + 9C_2 - 10) = 4 - 5C_1 - 4C_2, \ \Rightarrow \ x_1 = \frac{1}{15}(10 - 6C_1 - 11C_2).$$

Загальний розв'язок вихідної системи:

$$x_1 = \frac{1}{15}(10 - 6C_1 - 11C_2); \ x_2 = \frac{1}{10}(19C_1 + 9C_2 - 10); \ x_3 = C_1; \ x_4 = C_2.$$

Нехай $C_1 = 4, \ C_2 = -4$, тоді

$$x_1 = \frac{1}{15}(10 - 6 \cdot 4 - 11 \cdot (-4)) = 2; \ x_2 = \frac{1}{10}(19 \cdot 4 + 9 \cdot (-4) - 10) = 3.$$

Частинний розв'язок даної системи $x_1 = 2; \ x_2 = 3; \ x_3 = 4; \ x_4 = -4.$

Перевірка.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot (-4) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 4, \quad \text{тотожність} \\ 9 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2, \quad \text{тотожність} \\ 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 9 \cdot 4 - (-4) = -2 \quad \Rightarrow \quad -2 = -2, \quad \text{тотожність} \end{cases}.$$

Розв'язок відповідає вихідній системі рівнянь.

3.6. Розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю. Ця система сумісна, бо для неї $r(A) = r(A^*) = r$. Доцільно згадати наступні випадки сумісності однорідної системи:

1) $r = n$ ($n -$ кількість невідомих), система визначена, тобто вона має єдиний розв'язок $x_1 = 0; \ x_2 = 0; \ .....; \ x_n = 0.$ Цей розв'язок називають нульовим або тривіальним;

2) $r < n$, система невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків, один з яких нульовий.

Практично. Довільна система лінійних однорідних рівнянь, в якій кількість рівнянь менша від кількості невідомих, має нетривіальний розв'язок.

3) Коли кількість рівнянь m збігається з кількістю невідомих ($m = n$), то:

а) однорідна система має ненульовий розв'язок при $\det A = 0$;

б) тільки нульовий розв'язок при $\det A \neq 0$.

Якщо однорідна система рівнянь невизначена, знаходять її загальний розв'язок і на його основі виконують побудову фундаментальної (основної) системи розв'язків (див. теорія 3.6).

Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків для наступних систем лінійних однорідних рівнянь:

Задача 3.23 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ -6x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 8x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$.

Розв'язок.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 \\ \cdot(-4) \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{перший рядок, помножений} \\ \text{на 3, (-4), (-2), додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го, 4-го} \\ \text{рядків} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & -8 & 19 \\ 0 & -8 & 19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{третій рядок, помножений} \\ \text{на (-1), додамо до 4-го рядка} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & -8 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \{\text{вилучимо 4-й рядок, що обнулився}\} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & -8 & 19 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 8 \\ \cdot 7 \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{другий рядок помноимо на 8,} \\ \text{а третій рядок - на 7}\end{matrix}\right\} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 56 & -88 \\ 0 & -56 & 133 \end{pmatrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{другий рядок додамо} \\ \text{до третього}\end{matrix}\right\} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 56 & -88 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ :8 \\ :45 \end{matrix} \sim \left\{\begin{matrix}\text{другий рядок поділимо} \\ \text{на 8, а третій - на 45}\end{matrix}\right\} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця містить мінори не вище третього порядку. Обчислимо:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 7 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14;\ M_3 \neq 0,\ \text{отже}\ r(A) = 3.\ \text{Маємо}\ r(A) = 3 = n = 3.$$

Система має тільки тривіальний розв'язок, тобто $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$. Фундаментальна система розв'язків не існує.

Задача 3.24 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Розв'язок.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\2&5&2\\5&-1&-4\\7&4&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-2)\\ \cdot(-5)\\ \cdot(-7)\end{matrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{перший рядок , помножений}\\ \text{на (-2), (-5), (-7), додамо}\\ \text{відповідно до 2-го, 3-го і 4-го}\\ \text{рядків}\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&9&6\\0&9&6\\0&18&12\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \cdot(-1)\\ \cdot(-2)\end{matrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{другий рядок , помножений}\\ \text{на (-1), (-2), додамо}\\ \text{відповідно до 3-го і 4-го}\\ \text{рядків}\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&9&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{вилучемо 3-й і 4-й}\\ \text{рядки, що обнулились}\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&9&6\end{pmatrix}:3\sim\left\{\begin{matrix}\text{третій рядок}\\ \text{поділімо на 3}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&3&2\end{pmatrix}.$$

Маємо: $r(A)=2$ (два рядки), тобто $r(A)=2<n=3$. Вихідна система нетривіальна (має безліч розв'язків). Для зручності за базисний приймемо наступний мінор $M_2=\begin{vmatrix}1&-2\\0&3\end{vmatrix}=3\neq 0.$ Згідно з одержаною матрицею запишемо еквівалентну систему рівнянь $\begin{cases}x_1-2x_2-2x_3=0\\ \quad\;\; 3x_2+2x_3=0\end{cases}$.

Мінор M_2 складено з коефіцієнтів при x_1, x_2, тому ці невідомі відносимо до базисних, а x_3 - до вільної невідомої. Еквівалентну систему запишемо у вигляді системи двох рівнянь з двома невідомими $\begin{cases}x_1-2x_2=2x_3\\ \quad\;\; 3x_2=-2x_3\end{cases}$.

Позначимо $x_3 = C$, де C - довільна константа. Тоді $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2C \\ \quad\;\; 3x_2 = -2C \end{cases} \Rightarrow$

$$x_2 = -\frac{2}{3}C; \quad x_1 - 2\cdot(-\frac{2}{3}C) = 2C \quad \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}C.$$

Загальний розв'язок системи: $x_1 = \frac{2}{3}C; \quad x_2 = -\frac{2}{3}C; \quad x_3 = C.$

Покладемо $C = 1$, та обчислимо значення невідомих, а саме $x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = -\frac{2}{3}; \quad x_3 = 1.$ Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків, яку представимо у вигляді наступної матриці – стовпця: $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді загальний розв'язок вихідної системи має вигляд:

$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot C$, або $X = (\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; 1)^T \cdot C$, де $(\frac{2}{3}; \frac{-2}{3}; 1)^T$ - транспонована матриця.

<u>Задача 3.25</u> $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + \quad 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}.$

<u>Розв'язок.</u>

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\6&4&3&5&7\\9&6&5&7&9\\3&2&0&4&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-2)\\ \cdot(-3)\\ \cdot(-1)\end{matrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{перший рядок помножений}\\ \text{на (-2), (-3), (-1) додамо до}\\ \text{2-го, 3-го, 4-го рядків}\\ \text{відповідно}\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&2&-2&-6\\0&0&-1&1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \cdot(-2)\\ \\ \end{matrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{другий рядок помножений}\\ \text{на (-2)додамо до 3-го рядка}\\ \text{та просто додамо до 4-го рядка}\end{matrix}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{вилучимо 3-й і 4-й рядки,}\\ \text{які обнулилися}\end{matrix}\right\}\sim\begin{pmatrix}3&2&1&3&5\\0&0&1&-1&-3\end{pmatrix}.$$

$r(A)=2<n=5$, тому система має нетривіальний розв’язок.

Зауваження. Цей висновок також слідкує з того, що у вихідній системі рівнянь менше ніж невідомих.

За базовий візьмемо наступний мінор: $M_2=\begin{vmatrix}3&1\\0&1\end{vmatrix}=3\neq 0.$ Він складений з коефіцієнтів при невідомих x_1, x_3 тому їх приймемо за базисні невідомі, а x_2, x_4, x_5 - за вільні невідомі. Одержимо еквівалентну систему двох рівнянь з двома невідомими $\begin{cases}3x_1+x_3=-2x_2-3x_4-5x_5\\ x_3=x_4+3x_5\end{cases}.$

Позначимо: $x_2=C_1,\ x_4=C_2, x_5=C_3$, тоді

$$\begin{cases}3x_1+x_3=-2C_1-3C_2-5C_3\\ x_3=C_2+3C_3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = C_2 + 3C_3 \Rightarrow 3x_1 + C_2 + 3C_3 = -2C_1 - 3C_2 - 5C_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}(C_1 + 2C_2 + 4C_3).$$

Загальний розв'язок даної системи

$$x_1 = -\frac{2}{3}(C_1 + 2C_2 + 4C_3),\ x_2 = C_1,\ x_3 = C_2 + 3C_3,\ x_4 = C_2,\ x_5 = C_3.$$

Покладемо:

1) $C_1 = 1,\ C_2 = 0, C_3 = 0;$
2) $C_1 = 0,\ C_2 = 1, C_3 = 0;$
3) $C_1 = 0,\ C_2 = 0, C_3 = 1.$

Після цього отримаємо три лінійно незалежних розв'язки, що утворюють наступну фундаментальну систему розв'язків:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot C_1 + \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot C_2 + \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot C_3, \quad \text{або}$$

$$X=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}\cdot C_1+\begin{pmatrix}-4\\0\\3\\3\\0\end{pmatrix}\cdot C_2+\begin{pmatrix}-8\\0\\9\\0\\3\end{pmatrix}\cdot C_3.$$

Перевірка. Нехай $C_1=3,\ C_2=-3, C_3=2,$ тоді

$$\begin{aligned}
&x_1=-2\cdot 3+(-4)\cdot(-3)+(-8)\cdot 2=-10,\\
&x_2=3\cdot 3+0+0=9,\\
&x_3=0+3\cdot(-3)+9\cdot 2=9,\\
&x_4=0+3\cdot(-3)+0=-9,\\
&x_5=0+0+6=6.
\end{aligned}$$

Ці значення підставимо у вихідну систему

$$\begin{cases}
3\cdot(-10)+2\cdot 9+9+3\cdot(-9)+5\cdot 6=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0, \quad \text{тотожність},\\
6\cdot(-10)+4\cdot 9+3\cdot 9+5\cdot(-9)+7\cdot 6=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0, \quad \text{тотожність},\\
9\cdot(-10)+6\cdot 9+5\cdot 9+7\cdot(-9)+9\cdot 6=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0, \quad \text{тотожність},\\
3\cdot(-10)+2\cdot 9 \quad + \quad 4\cdot(-9)+8\cdot 6=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0, \quad \text{тотожність}.
\end{cases}$$

Розв’язок зроблено вірно.

Задача 3.26 $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=0\\ 4x_1+2x_2-3x_3=0\\ 2x_1-4x_2+5x_3=0\end{cases}.$

Розв’язок.

В цій системі кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих, тому матриця A квадратна. Обчислимо її визначник

$$\det A=\begin{vmatrix}1&-3&1\\4&2&-3\\2&-4&5\end{vmatrix}=10-16+18-4-12+60=60.$$

$\det A \neq 0$, тому система має тільки тривіальний розв’язок, а саме: $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$

Задача 3.27 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}.$

Розв’язок.

В даній системі кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих. Визначник матриці A має четвертий порядок. Щоб спростити його обчислення виконаємо елементарні перетворення цієї матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-4) \\ \cdot(-5) \end{matrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{перший рядок, помножений} \\ \text{на (-2), (-4), (-5), додамо} \\ \text{відповідно до 2-го, 3-го і} \\ \text{4-го рядків} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left\{ \begin{matrix} \text{другий рядок, помножений} \\ \text{на (-1), (-2), додамо} \\ \text{відповідно 3-го і 4-го рядків} \end{matrix} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Згідно з властивостями визначників $\det A = 0$.

Отже система має нетривіальний (не тільки нульовий) розв’язок. Тому продовжимо виконувати розв’язок вихідної системи. Вилучимо із перетвореної матриці 3-й і 4-й рядки, що обнулились: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \ r(A) = 2 < n = 4.$

Це також свідчить про нетривіальний розв'язок системи. Для зручності за базисний приймемо наступний мінор: $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3 \neq 0.$ Він складений коефіцієнтами при x_1, x_2, тому ці невідомі віднесемо до базисних, а x_3, x_4 - до вільних невідомих. Маємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3x_3 - x_4 \\ \quad -3x_2 = 5x_3 - x_4 \end{cases}.$$

Позначимо $x_3 = C_1,\ x_4 = C_2$, тоді $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3C_1 - C_2 \\ \quad -3x_2 = 5C_1 - C_2 \end{cases}$,

$$x_2 = -\frac{1}{3}(5C_1 - C_2) = \frac{1}{3}(C_2 - 5C_1);$$

$$x_1 + \frac{1}{3}(C_2 - 5C_1) = -3C_1 - C_2 \ \Rightarrow \ x_1 = -\frac{4}{3}(C_1 + C_2).$$

Загальний розв'язок вихідної системи:

$$x_1 = -\frac{4}{3}(C_1 + C_2); \quad x_2 = \frac{1}{3}(C_2 - 5C_1); \quad x_3 = C_1; \quad x_4 = C_2.$$

Покладемо:

1) $C_1 = 1, C_2 = 0,$

2) $C_1 = 0, C_2 = 1.$

Тоді отримаємо два лінійно незалежних розв'язки:

1) $x_1 = -\frac{4}{3}; \quad x_2 = -\frac{5}{3}; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0.$

2) $x_1 = -\frac{4}{3}; \quad x_2 = \frac{1}{3}; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 1.$

Ці розв'язки утворюють фундаментальну систему розв'язків, яку запишемо у вигляді наступних матриць-стовпців:

$$X_1=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix};\quad X_2=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок даної системи має вигляд:

$$X=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\cdot C_1+\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ \frac{1}{3}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\cdot C_2 \text{ або } X=\begin{pmatrix}-4\\ -5\\ 3\\ 0\end{pmatrix}\cdot C_1+\begin{pmatrix}-4\\ 1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\cdot C_2$$

Зробимо перевірку. Нехай $C_1=2, C_2=-1,$ тоді

$x_1=-4\cdot 2+(-4)\cdot(-1)=-4;\quad x_2=-5\cdot 2+1\cdot(-1)=-11;$

$x_3=3\cdot 2+0\cdot(-1)=6;\quad x_4=0\cdot 2+3\cdot(-1)=-3.$

Підставимо ці значення у вихідну систему

$$\begin{cases}-4+(-11)+3\cdot 6+(-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0, \quad \text{тотожність},\\ 2\cdot(-4)-(-11)+6+3\cdot(-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0, \quad \text{тотожність},\\ 4\cdot(-4)+(-11)+7\cdot 6+5\cdot(-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0, \quad \text{тотожність},\\ 5\cdot(-4)-(-11)+5\cdot 6+7\cdot(-3)=0 \quad\Rightarrow\quad 0=0, \quad \text{тотожність}.\end{cases}$$

Розв'язок відповідає вихідної системі лінійних рівнянь.

Завдання для самоконтролю

Розв'язати системи рівнянь: а) по формулам Крамера;

б) матричним способом.

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 = 7. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_2 + 3x_3 + 6 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Дослідити системи рівнянь я якщо вони сумісні розв'язати їх методом Гаусса.

7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 4x_1 + 5x_2 = 7. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 5x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -8, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$

16.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 + 4x_5 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_4 + 2x_5 = -3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 2x_5 = -14, \\ 2x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 7x_5 = -10. \end{cases}$$

Розв’язати однорідні системи рівнянь.

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

Відповіді

1. $x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$ 2. $x_1 = x_2 = 3/4.$ 3. $x_1 = x_2 = x_3 = 1.$

4. $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$ 5. $x_1 = -2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1.$

6. $x_1 = 3, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -2.$ 7. $x_1 = \dfrac{18 - 15c}{10}, \quad x_2 = c, \quad x_3 = -\dfrac{7}{5}.$

8. $x_1 = \dfrac{7 - c}{3}, \quad x_2 = \dfrac{4 + 2c}{3}, \quad x_3 = c.$ 9. $x_1 = -2, \quad x_2 = 3.$

10. $x_1 = x_2 = x_3 = 1.$ 11. Несумісна. 12. $x_1 = 3, \quad x_2 = x_3 = 1.$

13. $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2.$ 14. Несумісна.

15. $x_1 = c, \quad x_2 = 7(c - 1), \quad x_3 = 5(c - 1), \quad x_4 = 0.$

16. $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 2.$ 17.
$x_1 = c,\ x_2 = -2c,\ x_3 = c.$

18. $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$ 19. $x_1 = 5c, \quad x_2 = 11c, \quad x_3 = 7c.$

20. $x_1 = -\dfrac{1}{4}c_1,\ x_2 = \dfrac{5}{4}c_1 + c_2,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2.$ 21. $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

22. $x_1 = -\dfrac{4}{3}(c_1 + c_2), \quad x_2 = \dfrac{1}{3}(c_2 - 5c_1), \quad x_3 = c_1, \quad x_4 = c_2.$

Індивідуальні завдання

1. Обчислити визначник двома методами:
а) розклавши його за елементами i-го рядка або j-го стовпця (вказано);
б) попередньо його спростивши:

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; $(j=2)$

1.6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; $(i=4)$

1.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; $(i=2)$

1.7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; $(j=4)$

1.3. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$; $(j=1)$

1.8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $(i=2)$

1.4. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; $(i=1)$

1.9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & -3 \end{vmatrix}$; $(j=2)$

1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; $(j=3)$

1.10. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; $(i=3)$

1.11. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; $(j=3)$

1.16. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; $(i=2)$

1.12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; $(i=3)$

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; $(j=2)$

1.13. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$; $(j=2)$

1.18. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; $(i=3)$

1.14. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$; $(i=2)$

1.19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; $(j=1)$

1.15. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$; $(j=3)$

1.20. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; $(i=2)$

2.Дано дві матриці A і B, знайти:
а) матрицю C за вказаними діями;
б) матрицю A^{-1} обернену до матриці A і виконати перевірку рівностей $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

2.1. $C=(A-B)(2A+B)$; $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

2.2. $C=(A-2B)\cdot B$; $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$;

2.3. $C=A\cdot(2B-A)$; $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2.4. $C=B\cdot(2A-B)$; $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2.5.

$C=(A+B)\cdot(3A-B)$; $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

2.6. $C=(B-2A)\cdot A;\quad A=\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix};$

2.7.

$$C=(A+3B)\cdot(B-A);\quad A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 16\\ -3 & -2 & 0\\ 5 & 7 & 2\end{pmatrix};$$

2.8. $C=(A-4B)\cdot A;\quad A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -5\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix};$

2.9.

$$C=(B-2A)\cdot(A+B);\quad A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix};$$

2.10. $C=(3A-2B)\cdot A;\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 0\\ -1 & 0 & 5\\ 5 & 13 & 21\end{pmatrix};$

2.11. $C=(A+2B)(2A+B);\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 7\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix};$

2.12. $C=(A+2B)\cdot B;\quad A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 6 & -1 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix};$

2.13. $C = A\cdot(3B - A);\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 10 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

2.14. $C = B\cdot(2B - A);\quad A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

2.15. $C = (A+B)\cdot(A-B);\quad A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

2.16. $C = (2B-3A)\cdot A;\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

2.17. $C = (A+B)\cdot(B-A);\quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix};$

2.18. $C = (2A-3B)\cdot A;\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix};$

2.19. $C = (B-2A)\cdot(A-B);\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix};$

2.20. $C = (3A+2B)\cdot A;\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

3. Розв'язати системи рівнянь:
а) за формулами Крамера;
б) матричним способом;
в) методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 10x_2 - 3x_3 = -9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -2 \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 8 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 17 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - 10x_2 - 3x_3 = -13 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

4. Дослідити сумісність системи рівнянь. У випадку сумісності розв'язати її методом Гаусса. Зробити перевірку.

4.1. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - x_3 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - 17x_2 + 5x_3 = -23 \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1 - 13x_2 + 8x_3 = 43 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 + 13x_2 + 2x_3 = -25 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -4 \\ 10x_1 + 14x_2 + 13x_3 = -2 \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -4 \\ 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -1 \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 7x_1 + 3x_2 + 11x_3 = 28 \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 4x_1 + 8x_2 - 7x_3 = -19 \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - 16x_2 - 11x_3 = -4 \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 11 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -3 \\ 7x_1 - 9x_2 + 16x_3 = 30 \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} x_1+7x_2-x_3=10 \\ 3x_1-6x_2 \qquad =9 \\ 4x_1-17x_2+5x_3=-23 \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=1 \\ 3x_1-4x_2+6x_3=1 \\ 5x_1-5x_2+5x_3=0 \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} x_1-13x_2+8x_3=43 \\ 3x_1-x_2+2x_3=9 \\ 7x_1+4x_2+x_3=1 \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} 4x_1-4x_2+7x_3=11 \\ 3x_1-x_2+5x_3=10 \\ 7x_1+3x_2+11x_3=28 \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} 4x_1+8x_2+4x_3=-16 \\ 3x_1-5x_2+2x_3=9 \\ 5x_1-x_2+4x_3=1 \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+2x_2-x_3=-3 \\ 4x_1+8x_2-7x_3=-19 \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} x_1-4x_2+x_3=-5 \\ 4x_1+2x_2+5x_3=-4 \\ 7x_1+8x_2+9x_3=-3 \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} 3x_1-4x_2-4x_3=-1 \\ 2x_1+4x_2-x_3=1 \\ 7x_1-16x_2-11x_3=-4 \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-4 \\ 5x_1+4x_2-7x_3=-1 \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} 6x_1-5x_2+9x_3=19 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=-3 \\ 7x_1-9x_2+16x_3=30 \end{cases}$

5. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність та у разі сумісності знайти її загальний розв’язок.

5.1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3+2x_4=2 \\ x_1+4x_2+x_3+x_4=-1 \\ 3x_1+8x_2+7x_3+9x_4=1 \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+5x_3+3x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \\ 2x_1-2x_2-2x_3-2x_4=-1 \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 3x_1 \quad - \quad x_3-3x_4=1 \\ 2x_1-2x_2-2x_3-2x_4=-1 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1 \quad + \quad 4x_3+2x_4=1 \\ x_1+x_2+3x_3+x_4=-1 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} 5x_1+12x_2+5x_3+5x_4=1 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=3 \\ 2x_1+5x_2+2_3+2x_4=1 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=-1 \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3+x_4=5 \\ x_1+5x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+2_3+2x_4=1 \\ -x_1+3x_2 \quad + \quad x_4=-1 \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=3 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+3x_4=5 \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 7x_1-3x_2+6x_3+2x_4=9 \\ 2x_1 \quad + \quad x_3-3x_4=3 \\ 2x_1 \quad + \quad 3x_3+2x_4=1 \\ 3x_1-3x_2+2x_3+3x_4=5 \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=-2 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=2 \\ 2x_1 \quad + \quad 3x_3+2x_4=0 \\ -5x_1+2x_2-6x_3-x_4=0 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 4x_1+2x_2+2x_3-6x_4=4 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 10x_1+4x_2+8x_3+2x_4=14 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+7x_3+6x_4=3 \\ 2x_1+2x_2+4x_3+2x_4=2 \\ x_1+4x_2+x_3+x_4=-1 \\ 3x_1+8x_2+7x_3+9x_4=1 \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} 4x_1 \quad + \quad 8x_3+4x_4=1 \\ x_1+x_2+5x_3+3x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_4=0 \\ 2x_1-2x_2-2x_3-2x_4=-1 \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=2 \\ 3x_1+x_2+2x_3 \qquad =2 \\ 5x_1-2x_2-3x_3-5x_4=0 \\ 2x_1-2x_2-2x_3-2x_4=-1 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3 \qquad =2 \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2 \\ 2x_1 \quad + \quad 4x_3+2x_4=1 \\ x_1+x_2+3x_3+x_4=-1 \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} 3x_1+7x_2+3x_3+3x_4=0 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=3 \\ 2x_1+5x_2+2_3+2x_4=1 \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=-1 \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} 2x_1-3x_2 \quad - \quad 2x_4=5 \\ x_1+5x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+2x_2+2_3+2x_4=1 \\ -x_1+3x_2 \quad + \quad x_4=-1 \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} 5x_1+4x_2+x_3+2x_4=7 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=3 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+3x_4=5 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} 7x_1-3x_2+6x_3+2x_4=9 \\ 5x_1-3x_2+3x_3 \qquad =8 \\ 2x_1 \quad + \quad 3x_3+2x_4=1 \\ 3x_1-3x_2+2x_3+3x_4=5 \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+3x_3-x_4=-4 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=2 \\ 2x_1 \quad + \quad 3x_3+2x_4=0 \\ -5x_1+2x_2-6x_3-x_4=0 \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 4x_1+2x_2+2x_3-6x_4=4 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 10x_1+4x_2+8x_3+2x_4=14 \end{cases}$

6. Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків для однорідної системи рівнянь.

6.1. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=0 \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+x_2+7x_3+5x_4=0 \\ 5x_1-x_2+5x_3+7x_4=0 \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x_1+6x_2+2x_3-x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+4x_4=0 \\ 4x_1+9x_2+6x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-3x_2+8x_3+11x_4=0 \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+9x_4=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ 10x_1+x_2-5x_3-12x_4=0 \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3-x_4=0 \\ 3x_1+3x_2-6x_3+7x_4=0 \\ 6x_1-9x_2-12x_3+4x_4=0 \\ 7x_1+2x_2-14x_3+13x_4=0 \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3-3x_4=0 \\ 3x_1-3x_2+x_3-15x_4=0 \\ 5x_1+5x_2+7x_3-21x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+5x_3-33x_4=0 \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-2x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3-5x_4=0 \\ 6x_1+9x_2+10x_3-9x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+8x_3-7x_4=0 \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3+6x_4=0 \\ 4x_1-7x_2+6x_3+4x_4=0 \\ 5x_1-5x_2+9x_3+11x_4=0 \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3-6x_4=0 \\ 4x_1+3x_2+x_3-4x_4=0 \\ 6x_1-5x_2+7x_3-16x_4=0 \\ 9x_1+2x_2+5x_3-14x_4=0 \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3-6x_4=0 \\ 3x_1-4x_2-2x_3-4x_4=0 \\ 6x_1+2x_2+4x_3-22x_4=0 \\ 7x_1-6x_2+2x_3-14x_4=0 \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-4x_4=0 \\ 5x_1+4x_2+x_3-10x_4=0 \\ 6x_1+7x_2+4x_3-14x_4=0 \\ 7x_1+10x_2+7x_3-18x_4=0 \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} 4x_1-2x_2+2x_3+6x_4=0 \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4=0 \\ 4x_1+x_2+7x_3+5x_4=0 \\ 9x_1 \qquad +12x_3+12x_4=0 \end{cases}$

6.16. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+4x_3+3x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+4x_4=0 \\ 6x_1+6x_2+8x_3+6x_4=0 \\ 7x_1-3x_2+8x_3+11x_4=0 \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} 4x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3-7x_4=0 \\ 4x_1-x_2-x_3+2x_4=0 \\ 6x_1+2x_2-4x_3-10x_4=0 \end{cases}$

6.17. $\begin{cases} 4x_1-x_2-8x_3+6x_4=0 \\ 3x_1+3x_2-6x_3+7x_4=0 \\ 6x_1-9x_2-12x_3+4x_4=0 \\ x_1+11x_2-2x_3+9x_4=0 \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} x_1+4x_2+3x_3-3x_4=0 \\ 3x_1-3x_2+x_3-15x_4=0 \\ 8x_1+2x_2+8x_3-36x_4=0 \\ 7x_1-2x_2+5x_3-33x_4=0 \end{cases}$

6.18. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3-5x_4=0 \\ 6x_1+9x_2+10x_3-9x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+8x_3-7x_4=0 \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3+6x_4=0 \\ 9x_1-12x_2+15x_3+15x_4=0 \\ 5x_1-5x_2+9x_3+11x_4=0 \end{cases}$

6.19. $\begin{cases} 5x_1-x_2+4x_3-10x_4=0 \\ 4x_1+3x_2+x_3-4x_4=0 \\ 6x_1-5x_2+7x_3-16x_4=0 \\ 9x_1+2x_2+5x_3-14x_4=0 \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3-6x_4=0 \\ 3x_1-4x_2 \qquad + \qquad 4x_4=0 \\ 6x_1+2x_2+4x_3-22x_4=0 \\ 7x_1-6x_2+2x_3-14x_4=0 \end{cases}$

6.20. $\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-4x_4=0 \\ 6x_1+7x_2+4x_3-14x_4=0 \\ 6x_1+7x_2+4x_3-14x_4=0 \\ 7x_1+10x_2+7x_3-18x_4=0 \end{cases}$

Розв’язок типового завдання

1. Дано визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 9 \\ 5 & -4 & 8 & -2 \end{vmatrix}$.

Обчислити цей визначник:

а) розклавши його за елементами другого рядка $i = 2$;

б) попередньо його спростивши:

<u>Розв’язок</u>

а) розкладемо визначник за елементами другого рядка:

$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24}$, де $a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}$ - елементи другого рядка, $A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24}$ - відповідно їх алгебраїчні доповнення. Обчислимо вказані алгебраїчні доповнення:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 9 \\ -4 & 8 & -2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{з першого стовпя} \\ \text{винесемо (-2), а з} \\ \text{третього рядка (2)} \end{matrix} \right\} =$$

$$= (-1) \cdot (-2) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 9 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{за правилом} \\ \text{трикутника} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 4(2 + 16 + 27 - 8 - 36 - 3) = -8.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 4 & -2 & 9 \\ 5 & 8 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 135 - 128 - 40 - 72 + 24 = -77.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{винесемо з другого} \\ \text{стовпця (-2)} \end{Bmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & 9 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(4+45-32-20-18+8) = -30.$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{винесемо з другого} \\ \text{рядка (2)} \end{Bmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot(8-24+10-15-4+32) = 14.$$

Обчислимо визначник за наведеною формулою:

$$\Delta = (-2)\cdot(-8) + 3\cdot(-77) + 5\cdot(-30) + 2\cdot 14 = 16 - 231 - 150 + 28 = -337.$$

б) Обчислимо визначник, попередньо його спростивши:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 9 \\ 5 & -4 & 8 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-4) \\ \cdot(-5) \end{matrix} = \begin{Bmatrix} \text{перший рядок помножимо} \\ \text{на 2, (-4), (-5) і додамо відповідно} \\ \text{до 2-го, 3-го, 4-го рядків} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -6 \\ 0 & 10 & -14 & 25 \\ 0 & 6 & -7 & 18 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{розкладемо визначник} \\ \text{за елементами першого} \\ \text{стовпця} \end{Bmatrix} =$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 11 & -6\\ 10 & -14 & 25\\ 6 & -7 & 18\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot 10\\ \cdot 6\end{matrix} = \left\{\begin{matrix}\text{перший рядок помножимо}\\ \text{на 10; 6 і додамо відповідно}\\ \text{до 2-го і 3-го рядків}\end{matrix}\right\} =$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 11 & -6\\ 0 & 96 & -35\\ 0 & 59 & -18\end{vmatrix} = \left\{\begin{matrix}\text{розкладемо визначник}\\ \text{за елементами першого}\\ \text{стовпця}\end{matrix}\right\} = (-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}96 & -35\\ 59 & -18\end{vmatrix} =$$

$$=-(96\cdot(-18)-59\cdot(-35))=-337.$$

2. Дано наступні дві матриці:

3.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 5 & 0 & -2\\ -4 & 3 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix};$$

Знайти:

а) матрицю $C=(2A-B)\cdot(A+2B)$;

б) матрицю A^{-1} обернену до матриці A і перевірити рівності $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$.

Розв’язок

а)

1) $$2A=2\cdot\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 5 & 0 & -2\\ -4 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -8 & 6\\ 10 & 0 & -4\\ -8 & 6 & 8\end{pmatrix};$$

2) $$2A-B=\begin{pmatrix}4 & -8 & 6\\ 10 & 0 & -4\\ -8 & 6 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4 & -1 & 5\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4-(-4) & -8-(-1) & 6-5 \\ 10-2 & 0-3 & -4-(-2) \\ -8-3 & 6-5 & 8-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 8 & -3 & -2 \\ -11 & 1 & 8 \end{pmatrix};$$

3) $$2B=2\cdot\begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & -2 & 10 \\ 4 & 6 & -4 \\ 6 & 10 & 0 \end{pmatrix};$$

4) $$A+2B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 & -2 & 10 \\ 4 & 6 & -4 \\ 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -6 & 13 \\ 9 & 6 & -6 \\ 2 & 13 & 4 \end{pmatrix};$$

5) $$(2A-B)\cdot(A+2B)=\begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 \\ 8 & -3 & -2 \\ -11 & 1 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 & -6 & 13 \\ 9 & 6 & -6 \\ 2 & 13 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8\cdot(-6)+(-7)\cdot 9+1\cdot 2 & 8\cdot(-6)+(-7)\cdot 6+1\cdot 13 & 8\cdot 13+(-7)\cdot(-6)+1\cdot 4 \\ 8\cdot(-6)+(-3)\cdot 9+(-2)\cdot 2 & 8\cdot(-6)+(-3)\cdot 6+(-2)\cdot 13 & 8\cdot 13+(-3)\cdot(-6)+(-2)\cdot 4 \\ (-11)\cdot(-6)+1\cdot 9+8\cdot 2 & (-11)\cdot(-6)+1\cdot 6+8\cdot 13 & (-11)\cdot 13+1\cdot(-6)+8\cdot 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -48-63+2 & -48-42+13 & 104+42+4 \\ -48-27-4 & -48-18-26 & 104+18-8 \\ 66+9+16 & 66+6+104 & -143-6+32 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -109 & -77 & 150 \\ -79 & -92 & 114 \\ 91 & 176 & -117 \end{pmatrix}.$$

б) $$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 0\cdot 4+5\cdot 3\cdot 3+(-4)\cdot(-2)\cdot(-4)-$$

$$-3\cdot 0\cdot(-4)-(-2)\cdot 3\cdot 2-(-4)\cdot 5\cdot 4=45-32+12+80=105.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення всіх елементів матриці A.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=6;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & -2\\ -4 & 4\end{vmatrix}=-12;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix}=15;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=25;\ A_{12}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & 4\end{vmatrix}=20;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -4\\ -4 & 3\end{vmatrix}=10;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 0 & -2\end{vmatrix}=8;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=19;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -4\\ 5 & 0\end{vmatrix}=20.$$

Запишемо матрицю A^{-1}: $A^{-1}=\dfrac{1}{105}\begin{pmatrix}6 & 25 & 8\\ -12 & 20 & 19\\ 15 & 10 & 20\end{pmatrix}$.

Зробимо перевірку

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{105}\begin{pmatrix}6 & 25 & 8\\ -12 & 20 & 19\\ 15 & 10 & 20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 5 & 0 & -2\\ -4 & 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{105}\begin{pmatrix}12+125-32 & -24+0+24 & 18-50+32\\ -24+100-76 & 48+0+57 & -36-40+76\\ 30+50-80 & -60+0+60 & 45-20+80\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{105}\begin{pmatrix}105 & 0 & 0\\ 0 & 105 & 0\\ 0 & 0 & 105\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Тепер: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 5 & 0 & -2\\ -4 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{105}\begin{pmatrix}6 & 25 & 8\\ -12 & 20 & 19\\ 15 & 10 & 20\end{pmatrix}=$

$$=\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 12+48+45 & 50-80+30 & 16-76+60 \\ 30+0-30 & 125+0-20 & 40+0-40 \\ -24-36+60 & -100+60+40 & -32+57+80 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 105 & 0 & 0 \\ 0 & 105 & 0 \\ 0 & 0 & 105 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Рівності $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1}=E$ виконуються.

Відповідь:

$$A^{-1}=\frac{1}{105}\begin{pmatrix} 6 & 25 & 8 \\ -12 & 20 & 19 \\ 15 & 10 & 20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{105} & \frac{25}{105} & \frac{8}{105} \\ \frac{-12}{105} & \frac{20}{105} & \frac{19}{105} \\ \frac{15}{105} & \frac{10}{105} & \frac{20}{105} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{35} & \frac{5}{21} & \frac{8}{105} \\ -\frac{4}{35} & \frac{4}{21} & \frac{19}{105} \\ \frac{3}{21} & \frac{2}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x_1-5x_2+4x_3=-1 \\ x_1-2x_2+3x_3=7 \\ 4x_1+3x_2-2x_3=-9 \end{cases}$.

а) за формулами Крамера; б) матричним способом; в) методом Гаусса.

<u>Розв’язок.</u>

а) за формулами Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=12+12-60+32-27-10=-41;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 7 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-4+84+135-72+9-70=82;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & -9 & -2 \end{vmatrix} = -42 - 36 - 12 - 112 + 81 - 2 = -123;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 54 - 3 - 140 - 8 - 63 - 45 = -205;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{82}{-41} = -2;\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-123}{-41} = 3;\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-205}{-41} = 5.$$

б) матричним способом

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю A^{-1} обернену до матриці A.

$\det A = \Delta = -41.$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5;\ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14;\ A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2;\ A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -22;\ A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -29;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7;\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-41} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -7 \\ 14 & -22 & -5 \\ 11 & -29 & -1 \end{pmatrix}; \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

$$X=\frac{1}{-41}\begin{pmatrix}-5 & 2 & -7\\ 14 & -22 & -5\\ 11 & -29 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 7\\ -9\end{pmatrix}=\frac{1}{-41}\begin{pmatrix}5+14+63\\ -14-154+45\\ -11-203+9\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-41}\begin{pmatrix}82\\ -123\\ -205\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

в) Методом Гаусса

Для зручності в заданій системі поміняємо містами перше і друге рівняння, а саме:

$$\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=7\\ 3x_1-5x_2+4x_3=-1\\ 4x_1+3x_2-2x_3=-9\end{cases}$$

Складемо розширену матрицю і зведемо її до верхньої трикутної матриці

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 7\\ 3 & -5 & 4 & -1\\ 4 & 3 & -2 & -9\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(-3)\\ \cdot(-4)\end{array}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{перше рівняння помножимо}\\ \text{на (-3), (-4) і додамо відповідно}\\ \text{до 2-го і 3-го рівнянь}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 7\\ 0 & 1 & -5 & -22\\ 0 & 11 & -14 & -37\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \cdot(-11)\end{array}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{друге рівняння помножимо}\\ \text{на (-11) і додамо до 3-го рівняня}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 7\\ 0 & 1 & -5 & -22\\ 0 & 0 & 41 & 205\end{array}\right).$$

Запишемо еквівалентну систему трикутного вигляду: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ \quad x_2 - 5x_3 = -22 \\ \qquad 41x_3 = 205 \end{cases}$

.

Виконаємо її розв’язок в зворотному напрямку:

$$x_3 = \frac{205}{41} = 5;$$
$$x_2 = 5x_3 - 22 = 5 \cdot 5 - 22 = 3;$$
$$x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 7 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 7 = -2.$$

Відповідь: $x_1 = -2; \quad x_2 = 3; \quad x_3 = 5.$

5. Задано наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 3 \\ 4x_1 - 11x_2 - 18x_3 = -31 \end{cases}$$

Дослідити її сумісність. У випадку сумісності розв’язати цю систему методом Гаусса. Зробити перевірку.

<u>Розв’язок.</u>

Скористуємось теоремою Кронекера-Капеллі. Для цього знайдемо ранги основної та розширеної матриць, відповідно $r(A)$ і $r(A^*)$.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 20 \\ 2 & -5 & -4 & 3 \\ 4 & -11 & -18 & -31 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-4) \end{array} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{перший рядок помножимо} \\ \text{на (-2), (-4) та додамо до} \\ \text{2-го і 3-го рядків відповідно} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 20 \\ 0 & -1 & -10 & -37 \\ 0 & -3 & -30 & -111 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-3) \end{array} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{другий рядок помножимо} \\ \text{на (-3) та додамо до} \\ \text{3-го рядка} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -2 & 3 & 20\\ 0 & -1 & -10 & -37\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -2 & 3 & 20\\ 0 & -1 & -10 & -37\end{array}\right).$$

Звідси виходить, що матриці A та A^* мінорів 3-го і вище порядків не мають. Кожна з цих матриць містить мінори другого порядку, які не дорівнюють нулю. Наприклад, для матриці A:

$M_2 = \begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -5\end{vmatrix} = -5 + 4 = -1 \neq 0.$ Отже, $r(A) = r(A^*) = 2 < n = 3.$

Система сумісна невизначена, тобто має безліч розв'язків, які залежать від одного параметра ($n - r = 3 - 2 = 1$). Оскільки мінор M_2 складений з коефіцієнтів при x_1, x_2, то базисними невідомими будуть x_1, x_2, а x_3 приймемо за вільну невідому (параметр).

Запишемо еквівалентну систему рівнянь згідно з останнім записом розширеної матриці, при цьому друге рівняння помножимо на (-1):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ \quad\ x_2 + 10x_3 = 37 \end{cases}.$$

Позначимо $x_3 = C$, де C - довільна константа.

Тоді: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3C = 20 \\ \quad\ x_2 + 10C = 37 \end{cases}.$

Перейдемо до зворотного ходу методу Гаусса:

$$x_2 = 37 - 10C; \quad x_1 = 20 + 2\cdot x_2 - 3C = 20 + 2\cdot(37 - 10C) - 3C = 94 - 23C$$
.

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$$x_1 = 94 - 23C; \quad x_2 = 37 - 10C; \quad x_3 = C.$$

Перевірка. Знайдемо частковий розв'язок системи на випадок, коли $C=4$.
$x_1=94-23\cdot 4=2;\quad x_2=37-10\cdot 4=-3;\quad x_3=4.$ Тоді:

$$\begin{cases} 2-2\cdot(-3)+3\cdot 4=20\\ 2\cdot 2-5\cdot(-3)-4\cdot 4=3\\ 4\cdot 2-11\cdot(-3)-18\cdot 4=-31\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 20=20 & \text{тотожність;}\\ 3=3 & \text{тотожність;}\\ -31=-31 & \text{тотожність.}\end{cases}$$

Розв'язок зроблено вірно.

6. Задано однорідну систему рівнянь
7.

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3-11x_4=0\\ 2x_1-7x_2-6x_3+4x_4=0\\ 4x_1-15x_2-2x_3-18x_4=0\\ 5x_1-18x_2-10x_3-3x_4=0\end{cases}$$

Знайти її загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків. Зробити перевірку.

<u>Розв'язок.</u>

Визначимо ранг матриці заданої систем, $r(A)$:

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&2&-11\\2&-7&-6&4\\4&-15&-2&-18\\5&-18&-10&-3\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \cdot(-2)\\ \cdot(-4)\\ \cdot(-5)\end{array}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{перший рядок помножимо}\\ \text{на (-2), (-4), (-5) і додамо}\\ \text{відповідно до 2-го, 3-го та}\\ \text{4-го рядків}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-4&2&-11\\0&1&-10&26\\0&1&-10&26\\0&2&-20&52\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1)\\ \cdot(-2)\end{array}\sim\left\{\begin{array}{l}\text{другий рядок помножимо}\\ \text{на (-1), (-2) і додамо}\\ \text{відповідно до 3-го та}\\ \text{4-го рядків}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -11\\ 0 & 1 & -10 & 26\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -11\\ 0 & 1 & -10 & 26\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює двом ($r(A)=2$), бо серед її мінорів другого (найбільшого) порядку є такий, що не дорівнює нулю, наприклад:

$$M_2=\begin{vmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Цей мінор приймаємо за базисний. Оскільки $r(A)=2<n=4$, задана система має нетривіальний (не тільки нульовий) розв'язок. Запишемо еквівалентну систему рівнянь згідно з кінцевим виглядом матриці А

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3-11x_4=0\\ \qquad x_2-10x_3+26x_4=0\end{cases}.$$

До базисного мінору M_2 ввійшли коефіцієнти при x_1, x_2, тому невідомі x_1, x_2 вважаємо базисними, а x_3, x_4 - вільними невідомими, які позначимо довільними константами, а саме: $x_3=C_1,\ x_4=C_2$. Враховуючи ці позначення запишемо еквівалентну систему рівнянь і виконаємо її наступний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2C_1-11C_2=0\\ \qquad x_2-10C_1+26C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=4x_2-2C_1+11C_2\\ \qquad x_2=10C_1-26C_2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=4\cdot(10C_1-26C_2)-2C_1+11C_2\\ \qquad x_2=10C_1-26C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=38C_1-93C_2\\ x_2=10C_1-26C_2\end{cases}$$

Загальний розв'язок системи:

$$x_1=38C_1-93C_2;\quad x_2=10C_1-26C_2;\quad x_3=C_1;\quad x_4=C_2.$$

Покладемо: 1) $C_1 = 1; \quad C_2 = 0;$ 2) $C_1 = 0; \quad C_2 = 1.$

Для цих значень із загального розв'язку одержимо фундаментальну систему розв'язків:

1) $x_1 = 38; \quad x_2 = 10; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = 0;$

2) $x_1 = -93; \quad x_2 = -26; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 1.$

Або в запису за допомогою матриць-стовпців:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 38 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} -93 \\ -26 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок заданої однорідної системи лінійних рівнянь запишемо за допомогою фундаментальної системи

$$X = \begin{pmatrix} 38 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} -93 \\ -26 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} C_2 .$$

Перевірка. Нехай $C_1 = 5; \quad C_2 = 2$, тоді:

$$X = \begin{pmatrix} 38 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 5 + \begin{pmatrix} -93 \\ -26 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 190 - 186 \\ 50 - 52 \\ 5 + 0 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тобто: $x_1 = 4; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 5; \quad x_4 = 2.$

Для цих значень обчислимо рівняння системи

$$\begin{cases} 4-4\cdot(-2)+2\cdot5-11\cdot2=0 \\ 2\cdot4-7\cdot(-2)-6\cdot5+4\cdot2=0 \\ 4\cdot4-15\cdot(-2)-2\cdot5-18\cdot2=0 \\ 5\cdot4-18\cdot(-2)-10\cdot5-3\cdot2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \quad (\text{тотожність}), \\ 0=0 \quad (\text{тотожність}), \\ 0=0 \quad (\text{тотожність}), \\ 0=0 \quad (\text{тотожність}). \end{cases}$$

Розв'язок зроблений вірно.

Література

1. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. / За редакцією Рудавського Ю. К. – Львів: Вид-во "Бескид Біт", 2002.
2. Є.С.Сінайський, Л.В.Новікова, Л.І.Заславська. Вища математика *(частина1):* навч. посібник. – *Дніпропетровськ: НГУ, 2004. – 389 с.*
3. Стислий курс вищої математики. Т.1: Аналітична геометрія та елементи лінійної алгебри/ Г.М.Тимченко, О.В.Одинцова, О.С.Мазур, Н.О.Кирилова.: навч. посібн. – К.: Кондор-Видавництво, 2016.- 176 с.
4. Вища математика в прикладах і задачах: у 2 т. Т.1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник / Л.В.Курпа, Ж.Б.Кашуба, Г.Б.Лінник [та ін.]; за ред. Л.В.Курпи. – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – 532с.
5. Олексенко В.М. Дистанційний курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посібник. – Х.: НТУ «ХПІ», 2003. – 240 с.
6. Рудавський Ю. К., Костробій П. П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – Львів: Вид-во "Бескид Біт", 2002.
7. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Т.1.: Навч. Посібник / За ред. Л.В.Курпа. — Харків: НТУ "ХПІ", 2002 – 316 с.
8. Математика 1. Конспект лекцій. Частина 1. / Л.Я.Фомичова– Дніпро: ТОВ «Лізунов Прес», 2017. – 72 с.
9. Методичні вказівки до виконання розрахункових завдань і контрольних модульних робіт з лінійної і векторної алгебри. / Л.Й.Бойко, А.Г.Шпорта. – Дніпропетровськ: НГУ, 2006. – 32 с.

Навчальне видання

Щербаков Петро Миколайович
Тимченко Світлана Євгенівна
Шпорта Анна Григорівна
Бабець Дмитро Володимирович
Головко Юрій Миколайович

Елементи лінійної алгебри

Навчальний посібник

Друкується в обробці авторів

Підписано до друку 10.11.2023. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 9,5.
Обл.-вид. арк. 11,3. Тираж 30 прим. Зам. № .

Підготовлено до друку та надруковано
в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка».
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004.
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.